Ha $p = 0$, akkor az egyenlet minden valós számra értelmes, és ekkor egyetlen megoldása van, $x = -1$.

Ha $p > 0$, akkor az egyenlet értelmezési tartománya a nemnegatív valós számok halmaza és a négyzetre emelt egyenlet ezen a halmazon ekvivalens az eredetivel.

Ha $p < 0$, akkor az egyenlet értelmezési tartománya a nem pozitív valós számok halmaza és a négyzetre emelt egyenlet a $[-1; 0]$ halmazon ekvivalens az eredetivel.

Ha most az egyenletet négyzetre emeljük, akkor rendezés után az

$$x^2 + (2 - p)x + 1 = 0 \tag{1}$$

másodfokú egyenletet kapjuk.

A p paraméternek azoknak az értékeit kell megkeresnünk, amelyekre az (1) egyenletnek egy gyöke van, és ez az eredeti egyenletnek is gyöke, **vagy pedig** az (1) egyenletnek két gyöke van, és ezek közül pontosan az egyik gyöke az eredeti egyenletnek.

Az (1) egyenlet diszkriminánsa, $D(p) = (2 - p)^2 - 4 = p(p - 4)$, ez nulla, ha $p = 0$ (ezt az esetet már vizsgáltuk), vagy pedig ha $p = 4$. Ekkor az (1) egyenlet egyetlen valós gyöke $x = 1$, ami az eredeti egyenletnek is megoldása.

$D(p) > 0$ pontosan akkor teljesül, ha $p > 4$ vagy $p < 0$. Ha $p > 4$, akkor az (1) egyenlet két valós gyökére

$$x_1 + x_2 = p - 2 > 0 \qquad \text{és} \qquad x_1 x_2 = 1 > 0,$$

a két gyök összege is és szorzata is pozitív, és így maguk a gyökök is pozitívak. Ebben az esetben van az eredeti egyenletnek is két különböző valós gyöke.

Ha $p < 0$, akkor a gyökök összege negatív, szorzatuk továbbra is pozitív, most az (1) egyenlet mindkét gyöke negatív, így mindkettő eleme az eredeti egyenlet értelmezési tartományának. Mivel a szorzat értéke 1 és a gyökök különbözők, egyikük abszolút értéke 1-nél nagyobb, másikuké pedig 1-nél kisebb. Előbbi az eredeti egyenletnek is gyöke, hiszen -1 és 0 közé esik, az utóbbi viszont nem, hiszen kisebb -1-nél. Ebben az esetben az eredeti egyenletnek pontosan egy valós gyöke van.

Összefoglalva: az egyenletnek pontosan akkor van egy megoldása, ha $p = 4$ vagy $p \leq 0$.

Megjegyzések. 1. A statisztikákból látható, hogy a nagy számú beküldött dolgozatnak körülbelül a háromnegyede alapvetően hibás. A feladat nem a négyzetre emelt egyenlet diszkriminánsának a 0 voltát firtatta; aki mechanikusan közelítette meg a kérdést, legfeljebb 1 pontot kapott. Felhívjuk versenyzőink és tanáraik figyelmét a dolgozatok tanulságára: még akkor is kiábrándító a kép, ha a sablonos kérdés csapdája belejátszott a sablonos – és rossz – megoldásba.

2. Az (1) egyenlet gyökeinek a vizsgálata természetesen a megoldóképletből nyert formulák elemzésével is elvégezhető.

3. Világossá válik a feladat eredménye, és a csapda is elkerülhető, ha a méltatlanul elhanyagolt *grafikus módszert* alkalmazzuk.

Az *ábrákon* mindenféle számolás nélkül látható, hogy a $p > 0$ esetben a parabolaívnek pontosan akkor van egy közös pontja az egyenessel, ha érinti: a megoldások számát tekintve tehát ekvivalens a két egyenlet, akkor kapunk egy gyököt, ha nulla a diszkrimináns.

Ha viszont $p < 0$, akkor a parabolaív és az egyenes pontosan egy pontban metszik egymást, minden negatív p megoldás.