Ábrázoljuk az egyenest a koordináta-rendszerben, és vegyünk fel egy tetszőleges $P(a;b)$ rácspontot (a és b egész).

Határozzuk meg a P pont távolságát az e egyenestől. Állítsunk P ponton keresztül merőlegest az e egyenesre. A merőleges egyenes egyenlete: $y-b=-\frac{4}{3}(x-a)$. Ezután meghatározzuk a két egyenes M metszéspontjának koordinátáit, majd a PM távolságot.

$$3x-4y=-4 \quad 4x+3y=3b+4a \quad / \cdot(-3) \quad / \cdot 4$$

Szorozzuk meg az első egyenletet (-4)-gyel, a másodikat 3-mal, majd az elsőt 3-mal és a másodikat 4-gyel, és adjuk össze az egyenleteket.

$$-12x+16y=16 \quad 12x+9y=9b+12a,$$

25y=9b+12a+16, 9x-12y=-12 16x+12y=12b+16a

25x=12b+16a-12,

azaz

y=1 $\frac{}{25(9b+12a+16)}$ és $x=\frac{1}{25}(12b+16a-12)$. A P pont távolsága e-től:

$$PM=\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}=\sqrt{\left[\frac{1}{25}(12b+16a-12)-a\right]^2+\left[\frac{1}{25}(9b+12a+16)-b\right]^2}.$$

Alakítsuk át a gyökjel alatti kifejezéseket:

$$\left[\frac{1}{25}(12b+16a-12-25a)\right]^2+\left[\frac{1}{25}(9b+12a+16-25b)\right]^2=$$
$$=\left[\frac{1}{25}\cdot(12b-9a-12)\right]^2+\left[\frac{1}{25}(12a+16-16b)\right]^2.$$

Az $\frac{1}{25}$-öt ki lehet emelni a gyökjel alól, és a zárójeles kifejezésekből kiemelhető 3, illetve 4. Vagyis átalakítva kapjuk, hogy a gyökjel alatt

$$[3(4b-3a-4)]^2+[4(3a-4b+4)]^2$$

áll. Legyen $4b-3a-4=u$, akkor $-4b+3a+4=-u$. Ezt helyettesítve

$$PM=\frac{1}{25}\sqrt{(3u)^2+[4(-u)]^2}=\frac{1}{25}\sqrt{25u^2}=\frac{1}{25}\cdot 5|u|=\left|\frac{4b-3a-4}{5}\right|,$$

ez pedig valóban racionális, mivel a és b egészek.

Megjegyzés. Az állítás minden olyan $px+qx+t=0$ egyenletű egyenesre igaz, amelyben p^2+q^2 négyzetszám (p, q, t egészek).