Vezessük be az egyelőre meghatározatlan t paraméterrel az $u=x-t$, $v=y-t$, $v=z-t$ új ismeretleneket. Ezekkel az ismeretlenekkel az átrendezett $xyz-xy-yz-zx+2=0$ egyenlet

$$uvw+(t-1)(uv+vw+wu)+(t^2-2t)(u+v+w)+t^3-3t^2+2=0$$

alakba írható. Mivel $t^3-3t^2+2=(t-1)(t^2-2t-2)$, látható, hogy $t=1$ választással a négy tag közül kettő lesz nulla, és az

$$uvw-u-v-w=0 \tag{1}$$

egyenlethez jutunk, ahol u, v és w nemnegatív egészek. Ezt fogjuk megoldani.

Ha u, v és w valamelyike nulla, akkor (1) szerint az összegük is az, és így az $u=v=w=0$ megoldást kapjuk. Föltehető ezért, hogy mindhárom érték legalább 1.

(1) bal oldala tovább alakítható:

$$(uv-1)(w-1)+(u-1)(v-1)-2=0. \tag{2}$$

Ha mindhárom érték legalább 2, akkor $uv\ge 4$, és így $(uv-1)(w-1)\ge 3$, amihez a nemnegatív $(u-1)(v-1)$-et adva nem kaphatunk 2-t. Így u, v és w között van 2-nél kisebb, és mivel mindhárom érték legalább 1, egyikük – például w – pontosan 1. Ekkor (2) így alakul:

$$(u-1)(v-1)=2. \tag{3}$$

A tényezők értéke nemnegatív, így a szorzat pontosan akkor 2, ha az egyik tényező 1, a másik pedig 2. Az $\{u,\ v\}$ halmaz tehát a $\{2,\ 3\}$ halmazzal egyenlő, így a szimmetrikus (1) nemnegatív megoldásai a $\{0,\ 0,\ 0\}$ és az $\{1,\ 2,\ 3\}$ számhármasok. Az eredeti egyenlet megoldásaira tehát vagy $\{x,\ y,\ z\}=\{1,\ 1,\ 1\}$, vagy pedig $\{x,\ y,\ z\}=\{2,\ 3,\ 4\}$.

Az egyenletnek így 7 megoldása van a pozitív egészek körében, $x_1=y_1=z_1=1$, illetve a 2, 3, 4 számhármas hatféle permutációjaként adódó megoldások.

Megjegyzések. 1. A fentiekhez hasonló számolgatással könnyen ellenőrizhető, hogy az x, y, z számhármas pontosan akkor megoldása az eredeti egyenletnek, ha az $x_1=2-x$, $y_1=2-y$, $z_1=2-z$ számhármas is megoldás. Mivel pedig az egyenletnek jól látható módon nincsen negatív egészekből álló megoldása (ekkor xy, yz, zx és $-xyz$ mindegyike legalább 1), így az egyenletnek olyan megoldása sem lehet, ahol mindhárom érték nagyobb 2-nél.

Az egyenletet kielégítő pozitív számhármasok között tehát szerepelnie kell 3-nál kisebb értéknek is. Ha egy pozitív megoldásnak eleme a 2, például $x=2$, akkor $x_1=0$, $y_1=2-y$ és $z_1=2-z$ is megoldás, ami azt jelenti, hogy $y_1z_1=2$. Innen vagy $\{y_1,\ z_1\}=\{1,\ 2\}$ és így $\{y,\ z\}=\{-1,\ 0\}$, ami nem pozitív megoldás, vagy pedig $\{y_1,\ z_1\}=\{-1,\ -2\}$ és így $\{y,\ z\}=\{3,\ 4\}$; megkaptuk a $\{2,\ 3,\ 4\}$ számhármast.

Azokat a pozitív megoldásokat nem találtuk még meg, amelyek elemei között nem szerepel a 2. Az ilyen megoldások legkisebb eleme az 1. Ha például $x=1\le y,\ z$, akkor az egyenlet az

$$y+z=2$$

alakot ölti, ez pedig a pozitív egész y és z értékekre csak úgy teljesülhet, ha $y=z=1$.

2. Az egyenletből pl. y kifejezhető mint az x változó paraméteres (a paraméter z) racionális törtfüggvénye:

$$y=\frac{zx-2}{(z-1)x-z}. \tag{4}$$

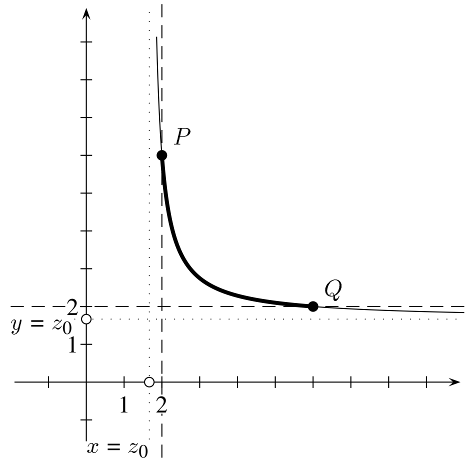
Ha az 1. megjegyzésben látottak szerint elintézzük azt az esetet, amikor valamelyik ismeretlen értéke 1, akkor a (3) függvényt abban az esetben kell vizsgálni, amikor x, y és $z\ge 2$, és mivel $x=y=z=2$ nem megoldás, az is föltehető, hogy $z>2$.

A függvény grafikonján keressünk tehát rácspontokat az $x\ge 2$; $y\ge 2$ feltételnek eleget tevő síknegyedben, amennyiben az egész értékű z paraméter értéke nagyobb 2-nél.

A függvény grafikonja szimmetrikus az $y=x$ egyenesre, és az *ábrán* látható. A hiperbola aszimptotái az $x=z_0$ és az $y=z_0$ egyenesek, ahol $z_0=\dfrac{z}{z-1}$. Mivel $z>2$, azért $1<z_0<2$.

Ha $x=2$, akkor $y=\dfrac{2z-2}{z-2}>2$, így a függvény grafikonján csak a PQ íven találhatunk rácspontot.

Az olvasóra bízzuk annak ellenőrzését, hogy ha $z>4$, akkor a PQ íven sincsen rácspont, ha $z=3$ vagy 4, akkor pedig az első esetben csak a $(2,\ 4)$ – és a szimmetrikus $(4,\ 2)$ –, a másodikban pedig csak a $(2,\ 3)$ és a szimmetrikus $(3,\ 2)$ rácspont esik a PQ ívre.



P
Q
2
$y = z_0$
1
1
2
$x = z_0$