I. megoldás. A háromjegyű szám számjegyei 0 és 9 közé esnek, a százasok helyén nem állhat 0. Írjuk fel az első néhány szám faktoriálisát:

$$0! = 1,\ ^{1}\text{megállapodás szerint} \quad 1! = 1, \quad 2! = 2, \quad 3! = 6, \quad 4! = 24, \quad 5! = 120, \quad 6! = 720, \quad 7! > 1000.$$

$7! > 1000$ miatt 7, 8, 9 nem szerepelhet a számjegyek között.
$6! = 720$ miatt 6-os sem lehet köztük, mert akkor a százasok helyén legalább 7 kellene álljon, amit kizártunk.
Ha nem lenne 5-ös a számjegyek között, akkor az előbbiek szerint a három számjegy összege legfeljebb $3 \cdot 24 = 72$ lehet, ami nem háromjegyű.
Három 5-ösből nem állhat a szám, mert $555 \neq 5! + 5! + 5! = 360$.
Ha két 5-ös szerepelne a jegyek között, akkor a faktoriálisok összege legalább 241, legfeljebb 264, tehát a harmadik számjegy a százasok helyén álló 2-es kellene legyen, de $255 \neq 2! + 5! + 5! = 242$.
Ha pedig egyetlen 5-ös szerepel a jegyek között, akkor a százasok helyén 1-es áll ($120 + 24 + 24 < 200$ miatt). A számjegyek faktoriálisainak összege $120 + 1 + 1 = 122$ és $120 + 1 + 24 = 145$ közé esik. Így csak a 125, a 135 és a 145 jöhet szóba. Ezeket megvizsgálva kapjuk, hogy a feladatnak egyetlen megoldása van, a 145 $(= 1 + 24 + 120)$.

II. megoldás. Ha az $A = 100a + 10b + c$ egy háromjegyű szám, akkor jelölje az $a! + b! + c!$ számot $f(A)$, az a, b, c jegyek maximumát pedig M. Ekkor nyilván $100 \leq A \leq 999$, másrészt

$$M! \leq f(A) \leq 3M!.$$

Így ha $A = f(A)$, akkor $100 \leq 3M!$ és $M! < 1000$, azaz

$$4! < \frac{100}{3} \leq M! < 1000,$$
$$4! < M! < 7!$$

és ezért $5 \leq M \leq 6$.

Ha $M = 6$, akkor $A \geq 6! = 720$, tehát az A első jegye nagyobb, mint 6, erről pedig az imént láttuk, hogy nem lehetséges. Így az A jegyeinek a maximuma 5. Ekkor nyilván

$$100a \leq A \leq a! + 2 \cdot 5! = a! + 240,$$

ez pedig biztosan nem teljesül, ha $2 < a \leq 5$.

Ha $a \leq 2$, akkor $a! = a$, a feltétel pedig

$$100a + 10b + c = a! + b! + c!, \tag{$*$}$$

ahol $\max(b,\ c) = 5$.

Ha b és c minimuma m, akkor $m \leq 5$, és $(*)$ most így írható:

$$99a + 10b + c = 5! + m!.$$

Ha $a = 2$, akkor innen $2 \cdot 99 \leq 120 + m!$, ahonnan $m! > 4!$, azaz $m = 5$. Ekkor $A = 255 \neq f(A) = 2! + 2 \cdot 5! = 242$.

Ha $a = 1$, akkor $A = 100 + 10b + c = 1 + 120 + m!$, és így

$$5! > 100 > 10b + c = 21 + m! > m!,$$

tehát $m \leq 4$. Ez azt jelenti, hogy

$$10b + c \leq 21 + 4! = 45, \tag{2}$$

azaz $b \leq 4$. Mivel $\max(b,\ c) = 5 > b$, innen $c = 5$ és $b = m \leq 4$. Most (2)-ből

$$10b + 5 = 21 + b! \qquad \text{és így} \qquad 10b - b! = 16.$$

A még szóbajövő $b = 1, 2, 3, 4$ értékekre ez egy esetben teljesül, akkor, ha $b = 4$. Így egyetlen olyan háromjegyű A szám van, amelyre $A = f(A)$, ez pedg a $145 = 1! + 4! + 5!$.

---

[1] *