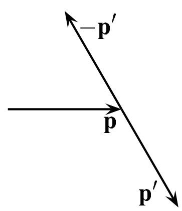
I. megoldás. Ha $\mathbf{p}$ α és 2α szögű elforgatottját $\mathbf{p}'$-vel, illetve $\mathbf{p}''$-vel jelöljük, akkor a feltétel szerint $\mathbf{p}+\mathbf{p}''=\mathbf{p}'$, azaz

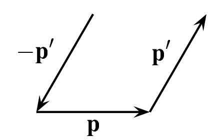
$$\mathbf{p}-\mathbf{p}'+\mathbf{p}''=\mathbf{0}.$$

A három vektor, $\mathbf{p}$, $-\mathbf{p}'$ és $\mathbf{p}''$ abszolút értéke egyenlő és nem 0, így ha összegük $\mathbf{0}$, akkor egymáshoz fűzve őket, három egyenlő szakaszból álló zárt töröttvonalat kapunk, ami azt jelenti, hogy a háromtagú zárt vektorlánc egy szabályos háromszöget alkot.

Ez kétféleképpen lehetséges: ha pozitív körüljárás szerint a $\mathbf{p}$ vektort a $-\mathbf{p}'$ követi a láncban (*1. ábra*), illetve ha $\mathbf{p}$, $\mathbf{p}''$ és $-\mathbf{p}'$ a sorrend (*2. ábra*).



1. ábra



2. ábra

Az első esetben a $\mathbf{p}'$ vektor a $\mathbf{p}$ vektor -60°-os elforgatottja, a másodikban pedig, a fordított sorrend miatt, a $\mathbf{p}'$ vektor a $\mathbf{p}$ 60°-os elforgatottja.

Az α szög tehát vagy $-60^\circ+n\cdot 360^\circ$, vagy pedig $60^\circ+k\cdot 360^\circ$, ahol n és k egész számok.

Megjegyzés. Látható, hogy az α szögre pontosan akkor teljesül a feladat feltétele, ha $\cos\alpha=\dfrac{1}{2}$.

II. megoldás. Ha tetszőleges φ szög és $\mathbf{p}$ vektor esetén $\varphi(\mathbf{p})$ jelöli a $\mathbf{p}$ vektor φ szögű elforgatottját, akkor a feltétel szerint

$$\mathbf{p}+2\alpha(\mathbf{p})=\alpha(\mathbf{p}). \tag{1}$$

Forgassuk most el az (1)-ben szereplő vektorokat α szöggel. Mivel vektorok összege tagonként forgatható, azért

$$\alpha(\mathbf{p}+2\alpha(\mathbf{p}))=\alpha(\mathbf{p})+\alpha(2\alpha(\mathbf{p}))=\alpha(\alpha(\mathbf{p})).$$

Elforgatott vektort továbbforgatva az eredő elforgatás szöge az elforgatások szögének összege, ezért $\alpha(2\alpha(\mathbf{p}))=3\alpha(\mathbf{p})$ és $\alpha(\alpha(\mathbf{p}))=2\alpha(\mathbf{p})$. Így

$$\alpha(\mathbf{p})+3\alpha(\mathbf{p})=2\alpha(\mathbf{p}). \tag{2}$$

(1) és (2) összegét tekintve

$$\mathbf{p}+\alpha(\mathbf{p})+2\alpha(\mathbf{p})+3\alpha(\mathbf{p})=\alpha(\mathbf{p})+2\alpha(\mathbf{p}),$$

azaz

$$\mathbf{p}+3\alpha(\mathbf{p})=\mathbf{0},$$

ha (1) teljesül, akkor a $\mathbf{p}$ vektor 3α szögű elforgatottja a $\mathbf{p}$ vektor ellentettje, a 3α-val való forgatás 180°-kal forgatja el a $\mathbf{p}$ vektort.

Így $3\alpha=180^\circ+k\cdot 360^\circ$, ahonnan $\alpha_1=60^\circ$, $\alpha_2=180^\circ$ és $\alpha_3=300^\circ$. Mivel (1) és (2) összegét használtuk, a talált értékek nem feltétlenül megoldásai az eredeti feladatnak; valóban, $\alpha_2=180^\circ$ láthatóan nem megoldás, ilyenkor $\mathbf{p}+360^\circ(\mathbf{p})=2\mathbf{p}$, ami nem egyenlő $180^\circ(\mathbf{p})=-\mathbf{p}$-vel, ha $\mathbf{p}\neq\mathbf{0}$.

A másik két érték, $\alpha_1=60^\circ$ és $\alpha_2=300^\circ$ láthatóan megoldások (*3. ábra*).

Megjegyzések. 1. A fenti megoldásban a $2\alpha(\mathbf{p})$ jelölés némi óvatosságot igényel: helyesebb volna $(2\alpha)\mathbf{p}$-nek írni, hiszen az nem az $\alpha(\mathbf{p})$ vektor kétszerese, hanem a 2α szöggel elforgatott $\mathbf{p}$ vektor.

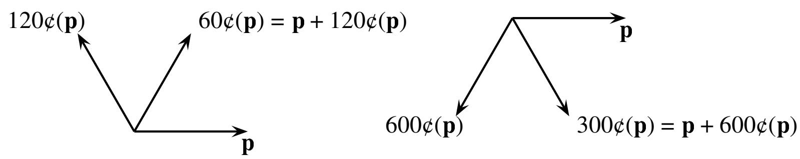
2. A feladat jelentése és a megoldás algebrai jellege a komplex számsíkon könnyen megmutatható. Ha az α szögű elforgatást az egységnyi abszolút értékű, α argumentumú a számmal való szorzásként hajtjuk végre, akkor a feltétel szerint a $p\neq 0$ komplex számra

$$p+a^2p=ap,$$

ahonnan p-vel osztva az

$$a^2 - a + 1 = 0 \tag{3}$$

másodfokú egyenletet kapjuk, amit $(a+1)$-gyel szorozva az $a^3+1=0$ egyenlet adódik. Ennek komplex gyökei, a komplex harmadik egységgyökök ellentettjei a (3) egyenlet megoldásai: $a_1 = \cos 60° + i \sin 60°$ és $a_2 = \cos(-60°) + i \sin(-60°)$. Innen is az $\alpha_1 = 60°$, $\alpha_2 = -60°$ adódik megoldásul, utóbbi természetesen ugyanaz, mint a 300°-os forgatás.



3. ábra

3. Ha tetszőleges forgásszögek is szóba jöhetnek – a feladat szövegében nincs megszorítás a szögekre –, akkor természetesen végtelen sok megoldás adódik: $\alpha_k = 60° + k \cdot 360°$, illetve $\alpha_n = -60° + n \cdot 360°$, ahol k és n tetszőleges egész számok.