Legyen $1 \leq i < j \leq 3$ esetén $\ell_i \cap \ell_j = Q_k$, ahol $\{i,\ j,\ k\} = \{1,\ 2,\ 3\}$. Belátjuk, hogy pl. Q_1Q_2 egyenese és AB egyenese párhuzamos. Ez éppen azt jelenti, hogy $\ell_3 \parallel AB$.

Irányított szögekkel fogunk számolni. $CAB\sphericalangle = \alpha$, $ABC\sphericalangle = \beta$, $BCA\sphericalangle = \gamma$. H_1H_2-t BC-be[1]Itt és a továbbiakban a szakaszok által meghatározott egyenesek forgatásáról van szó.
A szerk. $(-\alpha)$ szögű forgatás viszi ($H_2H_1C\sphericalangle = CAB\sphericalangle$, mert H_1H_2AB négyszög húrnégyszög: H_1 és H_2 rajta van az AB szakasz Thálesz-körén.)

T_1T_2-t $\left(-\dfrac{\pi-\gamma}{2}\right)$ szögű forgatás viszi BC-be (a CT_1T_2 háromszög egyenlő szárú), így H_1H_2-t T_1T_2-be $(-\alpha) - \left(-\dfrac{\pi-\gamma}{2}\right)$ szögű forgatás viszi. H_1H_2-t ℓ_3-ba ennek kétszerese, $-2\alpha - (-\pi + \gamma) = \pi - 2\alpha - \gamma$ szögű forgatás viszi. Így ℓ_3-at BC-be $-(\pi - 2\alpha - \gamma) + (-\alpha) = -\pi + \alpha + \gamma = -\beta$ szögű forgatás viszi, amivel állításunkat igazoltuk.

A Q_iT_i $(i = 1,\ 2,\ 3)$ egyenesek a $W_1W_2W_3$ háromszöget határozzák meg.

Ezután a következőket látjuk be:

*(i)*A $W_1W_2W_3$ háromszög talpponti háromszöge a $Q_1Q_2Q_3$ háromszög.

*(ii)*A $W_1W_2W_3$ háromszög középvonalai a $T_1T_2T_3$ háromszöget adják.

(i) Egyszerűen adódik, hogy pl.: $H_1H_2B\sphericalangle = BH_2H_3\sphericalangle = \dfrac{\pi}{2} - \beta$, ezért T_2 távolsága H_2H_1-től és H_2H_3-tól megegyezik. T_2 távolsága H_2H_1-től és ℓ_3-tól, illetve H_2H_3-tól és ℓ_1-től is ugyanakkora, azaz T_2 egyenlő távolságra van Q_2Q_1 és Q_2Q_3-tól, így Q_2T_2 a $Q_1Q_2Q_3\sphericalangle$ külső szögfelezője. Hasonló áll Q_3T_3 és Q_1T_1 esetén is. Emiatt *(i)* valóban fennáll.

(ii) Belátjuk, hogy pl. T_1T_2 egyenese párhuzamos W_1W_2 egyenesével, azaz Q_3T_3-mal. *(i)* miatt Q_3T_3 a $Q_2Q_3Q_1$ szög külső szögfelezője, így mivel a $Q_1Q_2Q_3$ háromszög és az ABC háromszög egyállású és $Q_2Q_3Q_1\sphericalangle = BCA\sphericalangle$, Q_3T_3-at Q_3Q_2-be $\left(-\dfrac{\pi-\gamma}{2}\right)$ szögű forgatás viszi. De láttuk, hogy T_1T_2-t BC-be is $\left(-\dfrac{\pi-\gamma}{2}\right)$ szögű forgatás viszi. Tehát mivel BC és Q_3Q_2 párhuzamosak, T_1T_2 is párhuzamos Q_3T_3-mal.

Így a Q_1, Q_2, Q_3, H_1, H_2, H_3 pontok rajta vannak a $W_1W_2W_3$ háromszög Feuerbach-körén, azaz egy körön vannak. Mivel a H_1, H_2, H_3 pontok éppen az ABC háromszög beírt körét határozzák meg, a bizonyítással készen vagyunk.

Gyenes Zoltán (Apáczai Cs. J. Gimn., 12. o.t.)

---

[1] *