Az egyszerűség kedvéért nevezzük a bolhákat pontoknak. Először azt mutatjuk meg, hogy $\lambda \geq \frac{1}{n-1}$-re az állítás mindig igaz. Azt mutatjuk meg, hogy akármilyen messzire eljuthatnak a pontok, ha mindig a legbalra esővel átugorjuk a legjobbra esőt. Ebben az esetben egy mohó algoritmus eljuttatja a pontokat M-en túlra. Az első $n-1$ lépésben minden pont különböző helyre kerül, ezt tekinthetjük a továbbiakban kiindulóhelyzetnek. Jelölje itt a szomszédos pontok közötti távolságot rendre $d_1, d_2, \ldots, d_{n-1}$. Egy ugrás után az új távolságok: $d_2, d_3, \ldots, d_{n-1}, (d_1+d_2+\dots+d_{n-1})\cdot\lambda$. Mivel

$$(d_1+d_2+\dots+d_{n-1})\cdot\lambda \geq \frac{d_1+d_2+\dots+d_{n-1}}{n-1} \geq \min(d_1,\ \ldots,\ d_{n-1}),$$

azért a legkisebb távolság változatlan marad. Jelölje ezt d. A legjobbra fekvő pont így minden lépésben legalább d-vel jobbra kerül. Mivel $d>0$, azért egy idő után akármilyen messzire eljut. Ezután $n-1$ lépésben a többi pont is M-en túlra jut, és ezt akartuk bizonyítani.

Most megmutatjuk, hogy ha $\lambda < \frac{1}{n-1}$, akkor semelyik kiindulóhelyzetből sem lehet akármilyen messzire eljutni. Minden ponthoz rendeljünk hozzá ugyanis egy számot úgy, hogy az egyenest a számegyenesnek tekintjük. Legyen s_k a k-adik lépés után a pontoknak megfelelő számok összege, w_k pedig a számok legnagyobbika. Nyilván $s_k \leq n\cdot w_k$. Ha bebizonyítanánk, hogy w_k korlátos, akkor készen lennénk, mert így egy pont sem juthatna át egy bizonyos M-en (a korláton) túlra. Ugorja át A a $(k+1)$-edik lépésben B-t és ezzel kerüljön C-be. Az értelemszerű jelölésekkel ebből:

$$s_{k+1} = s_k + c - a, \qquad c - b = \lambda(b-a),$$

ezt átrendezve $\lambda(c-a) = (1+\lambda)(c-b)$. Tehát $s_{k+1} = s_k + \frac{1+\lambda}{\lambda}(c-b)$.

Most igazoljuk, hogy

$$s_{k+1} - s_k = \frac{1+\lambda}{\lambda}(c-b) \geq \frac{1+\lambda}{\lambda}(w_{k+1}-w_k).$$

$b \leq w_k$, tehát ha $c \geq w_{k+1}$, akkor ez valóban igaz. Ha pedig $c < w_{k+1}$, akkor $w_{k+1} = w_k$, hiszen a legjobbra eső pont nem változhatott másra, mint c-re. Ekkor az egyenlőtlenség nyilvánvaló.

Tehát $s_{k+1} - s_k \geq \frac{1+\lambda}{\lambda}(w_{k+1}-w_k)$. Vagyis $\frac{1+\lambda}{\lambda}\cdot w_k - s_k \geq \frac{1+\lambda}{\lambda}w_{k+1} - s_{k+1}$.

Mivel $\lambda < \frac{1}{n-1}$, azért $1+\lambda > n\lambda$, amiből $\frac{1+\lambda}{\lambda} - n > 0$. Legyen $\mu = \frac{1+\lambda}{\lambda} - n$. Ekkor

$$\frac{1+\lambda}{\lambda}\cdot w_k - s_k = \mu\cdot w_k + (n\cdot w_k - s_k) \geq \mu\cdot w_k,$$

Ezek szerint $w_k \leq \frac{\frac{1+\lambda}{\lambda}\cdot w_1 - s_1}{\mu}$, tehát w_k korlátos, készen vagyunk.

Így a megoldás: $\lambda \geq \frac{1}{n-1}$.

Pálvölgyi Dömötör (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., 12. o.t.)