

Ha a 3 szorzótényező közül egy vagy három negatív, akkor a szorzat negatív, vagyis kisebb 1-nél. Ha valamelyik tényező 0, akkor a szorzat is 0, szintén kisebb 1-nél. Pontosán két tényező nem lehet negatív, mert ha például  $a - 1 + \frac{1}{b} < 0$  és  $b - 1 + \frac{1}{c} < 0$  lenne, akkor az összegük

$$0 > a - 1 + \frac{1}{b} + b - 1 + \frac{1}{c} = \left(b - 2 + \frac{1}{b}\right) + a + \frac{1}{c} = \frac{(b-1)^2}{b} + a + \frac{1}{c} > 0,$$

mert  $a, b, c > 0$ , ez nem lehet.

Tehát az az eset marad, amikor mindhárom szorzótényező pozitív.

$$\begin{aligned} \left(a - 1 + \frac{1}{b}\right) \left(b - 1 + \frac{1}{c}\right) &= ab - a + \frac{a}{c} - b + 1 - \frac{1}{c} + 1 - \frac{1}{b} + \frac{1}{bc} = \\ &= \frac{1}{c} - a + \frac{a}{c} - b + 1 - \frac{1}{c} + 1 - \frac{1}{b} + a = \frac{a}{c} - b + 2 - \frac{1}{b} = \frac{a}{c} - \frac{(b-1)^2}{b} \leq \frac{a}{c}, \end{aligned}$$

ugyanígy a másik 2-2 tényezőre. Mindhárom tényező pozitív, tehát

$$\begin{aligned} &\left(a - 1 + \frac{1}{b}\right) \left(b - 1 + \frac{1}{c}\right) \left(c - 1 + \frac{1}{a}\right) = \\ &= \sqrt{\left(a - 1 + \frac{1}{b}\right) \left(b - 1 + \frac{1}{c}\right)} \sqrt{\left(b - 1 + \frac{1}{c}\right) \left(c - 1 + \frac{1}{a}\right)} \sqrt{\left(c - 1 + \frac{1}{a}\right) \left(a - 1 + \frac{1}{b}\right)} \leq \\ &\leq \sqrt{\frac{a}{c}} \sqrt{\frac{b}{a}} \sqrt{\frac{c}{b}} = 1, \end{aligned}$$

ezt akartuk bizonyítani.

*Győri Nikolett* (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., 12. o.t.)