Egy nagyon hosszú henger körül a gravitációs erőtér hengerszimmetrikus, a térerősség iránya (a henger végtől elegendően távol) radiális, azaz a henger tengelyére merőleges irányú, nagysága pedig csak a tengelytől mért távolságtól függ.

A gravitációs erőtörvény és a Coulomb-törvény analógiáját felhasználva megállapíthatjuk, hogy egy m tömegű testből „kilépő" gravitációs erővonalak száma (azaz a $\mathbf{g}$ gravitációs gyorsulás és a rá merőleges felület szorzata) $4\pi f\cdot m$, ahol f a Newton-féle gravitációs állandó. Eszerint egy L hosszúságú, r sugarú henger palástján kilépő g-vonalak száma és a hengerben található tömeg kapcsolata:

$$g\cdot 2r\pi L=4\pi f R^2\pi L\rho,\quad \text{azaz}\quad g(r)=\frac{2\pi f R^2\rho}{r}.$$

a) A fenti erőtörvény egy körpályán keringő test sebessége (az $mg=mv^2/r$ mozgásegyenlet) szerint egy körpályán keringő test sebessége a pálya sugarától függetlenül (így a bolygó felszínén is)

$$v=\sqrt{2fR^2\pi\rho},$$

ekkora tehát a bolygón az első kozmikus sebesség. Ez a Földre érvényes

$$v_F=\sqrt{\frac{fM_{\text{Föld}}}{R}}=\sqrt{\frac{4}{3}R^2\pi f\rho}=7{,}9\ \text{km/s}$$

értéknél $\sqrt{3/2}$-szer nagyobb, mintegy 9,7 km/s.

b) Egy r sugarú pályán keringő műhold keringési ideje $T_r=2\pi r/v$, ha tehát ezen a bolygón egy „nap" T_0 hosszú, a szinkronműhold pályasugara

$$r_0=\frac{T_0 v}{2\pi}=R\sqrt{\frac{T_0^2 f\rho}{2\pi}}.$$

A Föld esetében ez a távolság $r^*=R\sqrt[3]{T_0^2 f\rho/3\pi}$, azaz

$$r_0=\sqrt{\frac{2r^{*3}}{3R}}\approx 1{,}33\cdot 10^8\ \text{m}.$$

A távközlési szinkronműholdak tehát $r_0-R=1{,}27\cdot 10^8$ m magasan keringenek a hosszú, henger alakú bolygó felszíne felett.

c) A második kozmikus sebesség, azaz a bolygóról való szökési sebesség nagyon nagy, hogy pontosan mekkora, az a bolygó hosszától függ. Végtelen hossz esetén a szökési sebesség is végtelen nagy, mert az $1/r$-es törvény szerint változó erőtérből véges energia-befektetéssel *nem lehet* megszökni. Ennek belátására tekintsük a távolságoknak egy mértani haladvány szerint növekvő sorozatát: $r_n=\alpha^n r_0$ ($\alpha>1$ és mondjuk $r_0=R$). Az r_{n-1} magasságból az r_n magasságba való feljutáshoz szükséges $E(r_{n-1}\to r_n)$ energia független az n-től: ahogy n nő, amennyire csökken az erő, annyira nő az út. Végül is az r_0 magasságból az r_N magasságba való feljutáshoz $E(r_0\to r_N)=NE(r_0\to r_1)$ energia kell. Már ebből is látszik, hogy véges energiával csak véges magasságra lehet feljutni.

Ha a bolygó nem végtelen hosszú (a hossza mondjuk H), akkor amíg a végeitől távol vagyunk, és $r\ll H$, addig az erőtörvény $1/r$-es, de ha már $r\simeq H$, az erőtörvény jellege megváltozik, és $r\gg H$ esetén a megszokott $1/r^2$-es lesz. Egy ilyen bolygóról már véges nagyságú kezdősebességgel indulva is meg lehet szökni.

Dolgos Gergely (Budapest, Árpád Gimn., 11. o.t.) és *Siroki László* (Debrecen, Fazekas M. Gimn., 11. o.t.)

dolgozata alapján

Megjegyzés. Integrálszámítás segítségével belátható, hogy a második kozmikus sebesség az első kozmikus sebességnek kb. $\sqrt{2}\cdot\ln(H/R)$-szerese. (A Föld esetében az arány $\sqrt{2}$.) Ez a logaritmikus faktor még $H\gg R$ esetén sem túlságosan nagy (pl. $H=10\,R$-nél v_{II}/v_I kb. 3, és $H=1000\,R$-nél sem nagyobb 10-nél).

(G. P.)