Először az f függvény néhány olyan tulajdonságát igazoljuk, amelyek a függvényegyenletből és az f folytonosságából következnek.

i) f kölcsönösen egyértelmű. Ha $f(x_1) = f(x_2)$, akkor persze $f\big(f(x_1)\big) = f\big(f(x_2)\big)$ is teljesül, így a függvényegyenlet szerint $x_1 = f\big(f(x_1)\big) - f(x_1) = f\big(f(x_2)\big) - f(x_2) = x_2$, az f tehát valóban kölcsönösen egyértelmű.

ii) Az f vagy szigorúan monoton növő, vagy szigorúan monoton fogyó, hiszen ha egy folytonos függvény kölcsönösen egyértelmű, akkor szigorúan monoton növő vagy fogyó.

iii) $f(0) = 0$, ugyanis ha $x = 0$, akkor a függvényegyenlet szerint $f\big(f(0)\big) = 0 + f(0)$, a kölcsönösen egyértelmű függvény egyenlő értékeket vesz föl a 0 és az $f(0)$ helyeken. Ez csak úgy lehetséges, ha $f(0) = 0$.

iv) Ha f szigorúan monoton növő, akkor az értékkészlete a valós számok halmaza. Valóban, ha $x > 0$, akkor $f(x) > f(0) = 0$, így $f\big(f(x)\big) = x + f(x) > x$, az f függvény tehát tetszőleges pozitív számnál nagyobb – és hasonlóan kapjuk, hogy tetszőleges negatív számnál kisebb – értékeket is fölvesz. Így, mivel folytonos, értékkészlete a valós számok halmaza. Inverze, f^{-1} tehát mindenütt értelmes és szintén monoton növő.

Térjünk most rá a megoldásra.

Vizsgáljuk először azt a lehetőséget, amikor az f függvény szigorúan monoton fogyó. Legyen $x \neq 0$ tetszőleges, és tekintsük az $x_1 = f(x)$, $x_2 = f\big(f(x)\big) = f(x_1)$, $\ldots$, $x_n = f(x_{n-1})$, $\ldots$ sorozatot. Ha $x = x_0$, akkor a függvényegyenlet szerint $x_k + f(x_k) = f\big(f(x_k)\big)$, azaz $x_k + x_{k+1} = x_{k+2}$, ha $k \geq 0$. Az x_k sorozat tehát ún. Fibonacci-típusú sorozat. Ismeretes – lásd például *Kós Géza* és *Énekes Béla* cikkét a KöMaL 2000. évi 9. számában –, hogy a Fibonacci-típusú sorozatok felírhatók két speciális ilyen sorozat segítségével: léteznek olyan c_1, c_2 számok, hogy

$$x_n = c_1 \cdot \tau^n + x_2(-\tau)^{-n}, \qquad \text{ahol } \tau = \frac{1+\sqrt{5}}{2}. \tag{1}$$

Mivel az f szigorúan monoton fogyó és $f(0) = 0$, azért x és $f(x)$ ellenkező előjelűek, a fenti x_n sorozat szomszédos tagjai is ilyenek, a sorozat váltakozó előjelű. A fenti (1) előállításban az első tag, $c_1\tau^n$ állandó előjelű, és abszolút értéke n növekedtével tetszőlegesen nagy lehet. A második tag, $c_2(-\tau)^{-n}$ előjele váltakozik, azonban ez a sorozat a 0-hoz tart, ha n tart a végtelenhez. Az x_n sorozat tehát csak akkor lehet a második taghoz hasonlóan váltakozó előjelű, ha az állandó előjelű „domináns tag”, $c_1 \cdot \tau^n = 0$, azaz $c_1 = 0$.

Ekkor $x_n = c_2 \cdot (-\tau)^{-n}$; $x_0 = c_2(-\tau)^0 = c_2 = x$ miatt pedig $f(x) = x_1 = x \cdot (-\tau)^{-1}$, azaz ha f monoton fogyó, akkor csak

$$f(x) = -\frac{x}{\tau}$$

lehetséges, ahol $\tau = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$. Az pedig könnyen ellenőrizhető – felhasználva például a $\tau^2 = \tau + 1$ összefüggést –, hogy erre a folytonos függvényre teljesül az adott függvényegyenlet.

Legyen most az f szigorúan monoton növő. *iv)* szerint f^{-1} mindenütt értelmes, így az $x \neq 0$ számból kiindulva elkészíthető az $x_{-1} = f^{-1}(x)$, $x_{-2} = f^{-1}(x_1)$, $\ldots$, $x_{-n} = f^{-1}(x_{-n+1})$, $\ldots$ sorozat; itt most az f értékein visszafelé lépegetve építjük föl a sorozatot.

$$\ldots x_{-3} \xrightarrow{f} x_{-2} \xrightarrow{f} x_{-1} \xrightarrow{f} x_0 \xrightarrow{f} x_1 \xrightarrow{f} x_2 \xrightarrow{f} \ldots$$

Az előbbi x_n sorozat „elé” illesztve a negatív indexű tagokat, továbbra is Fibonacci-típusú sorozatot kapunk, az (1) összefüggés a sorozat n-edik tagjára is érvényes marad a kiterjesztett sorozatra is.

Ha most $n \to -\infty$, akkor persze a váltakozó előjelű $c_2(-\tau)^{-n}$ lesz a „domináns”, $c_1 \cdot \tau^n$ a 0-hoz tart. Az x_n sorozat ($n \in \mathbf{Z}$) viszont most *állandó előjelű*, hiszen $x > 0$ esetén $f(x) > 0$, $x < 0$ esetén pedig $f(x) < 0$. Ez pedig csak úgy lehetséges, ha a nem korlátos, váltakozó előjelű $c_2(-\tau)^{-n}$ rész 0, $x_n = c_1\tau^n$; ahonnan az előző esethez hasonlóan az $f(x) = x_1 = x \cdot \tau^1$, azaz

$$f(x) = \tau x$$

adódik. A $\tau^2 = \tau + 1$ összefüggésből azonnal adódik, hogy ez a függvény is megoldás.

A függvényegyenletnek tehát két folytonos megoldása van; mindkettő elsőfokú függvény,

$$f_1(x) = -\frac{x}{\tau} \qquad \text{és} \qquad f_2(x) = \tau x,$$

ahol $\tau = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.