Legyen u, v az egyenlet egy megoldása, azaz $u^2 - av^2 = -1$. Mivel u és v egyike sem nulla feltehető, hogy mindketten pozitívak. Legyen $n = u^2 + av^2$ és $k = 2uv$; ekkor

$$n^2 - ak^2 = (u^4 + a^2v^4 + 2au^2v^2) - 4au^2v^2 = (u^2 - av^2)^2 = 1.$$

Ekkor

$$\begin{aligned} -1 = (n^2 - ak^2)(u^2 - av^2) = n^2u^2 - an^2v^2 - ak^2u^2 + a^2k^2v^2 = \\ = (nu + akv)^2 - a(nv + ku)^2. \end{aligned}$$

Ez azt jelenti, hogy az u, v párhoz hasonlóan az $u_1 = nu + akv$, $v_1 = nv + ku$ pár is megoldása az $x^2 - ay^2 = -1$ egyenletnek. Mivel az u, v, n, k számok mindegyike pozitív, $u < u_1$ és $v < v_1$. Ezt folytatva, az u_1, v_1 párból olyan u_2, v_2 megoldást nyerhetünk, amelyre $u_1 < u_2$, $v_1 < v_2$ és így tovább; a fennálló egyenlőtlenségek biztosítják, hogy a kapott megoldások mind különbözőek.

Hablicsek Márton(Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., 9. o.t.) Rácz Éva(Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., 10. o.t.)

Megjegyzés. Tekintsük az $r + s\sqrt{a}$ alakú számokat, ahol r, s tetszőleges egészek. Mivel a feladat feltételei miatt $\sqrt{a}$ irracionális, ez a felírás egyértelmű, és ilyen alakú számok szorzata is ilyen. A feladat állítása (és a fenti bizonyítás is) lényegében azon múlik, hogy az ilyen alakú számok *normáját* $N(r + s\sqrt{a}) := (r + s\sqrt{a})(r - s\sqrt{a}) = r^2 - as^2$-nek definiálva

$$N((r_1 + s_1\sqrt{a}) \cdot (r_2 + s_2\sqrt{a})) = N(r_1 + s_1\sqrt{a}) \cdot N(r_2 + s_2\sqrt{a})$$

teljesül.