I. megoldás. Megmutatjuk, hogy pl. $N=5\cdot 10^{2000}+1$ megfelelő. Mivel

$$N^2=(5\cdot 10^{2000}+1)^2=25\cdot 10^{4000}+10^{2001}+1$$

utolsó 2001 jegye: $000\ldots 001$, az $N^{2000}=(N^2)^{500}$ is 2000 nullára és egy egyesre végződik. Ezért $N^{2001}=N\cdot N^{2000}$ utolsó 2001 jegye megegyezik N utolsó 2001 jegyével.

Németh Adrián (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn. 9. o.t.)

Megjegyzés. A binomiális tétellel megmutatható, hogy $10^{2000}+1$ is kielégíti a feladat követelményét.

Paulin Roland (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., 7. o.t.)

II. megoldás. Ha egy a szám négyzete „a-ra végződik", akkor minden további hatványa is; elegendő tehát olyan 2001 jegyű a számot találni, amelyre $10^{2001}\mid a^2-a=a(a-1)$. Utóbbi biztosan teljesül, ha $2^{2001}\mid a$ és $5^{2001}\mid a-1$, és akkor is, ha $5^{2001}\mid a$ és $2^{2001}\mid a-1$. Az első két oszthatósági feltételt kielégítő számot keressük $a=2^{2001}x$ alakban (ekkor az első oszthatóság már biztosított), erre még $2^{2001}x-1=5^{2001}y$-nak, azaz $2^{2001}x-5^{2001}y=1$-nek kell teljesülnie. Mivel 2^{2001} relatív prím 5^{2001}-hez, ilyen x (és y) egész biztosan létezik, és az ezzel képezett $2^{2001}x$ szám 10^{2001}-nel való a_1 osztási maradéka egy, a feladat feltételét kielégítő *legfeljebb* 2001 jegyű szám. Hasonlóan kaphatunk olyan, ugyancsak legfeljebb 2001 jegyű a_2 számot, amelyre $5^{2001}\mid a_2$ és $2^{2001}\mid a_2-1$. Mivel $2^{2001}\mid a_1$, $5^{2001}\mid a_2$, $5^{2001}\mid a_1-1$, $2^{2001}\mid a_2-1$, azért $a_1a_2=10^{2001}c$ és $(a_1-1)(a_2-1)=10^{2001}d$, alkalmas $c>d$ pozitív egészekkel. Így

$$a_1+a_2-1=a_1a_2-(a_1-1)(a_2-1)=10^{2001}(c-d)$$

is osztható 10^{2001}-nel, ezért legalább 10^{2001}. Tehát az a_1 és a_2 közül legalább az egyik pontosan 2001 jegyű, ellenkező esetben ugyanis $10^{2001}\le a_1+a_2-1<a_1+a_2<2\cdot 10^{2000}$, ami ellentmondás.