I. megoldás. Ha $p=1$, akkor a sorozat minden tagja 1, a sorozat elemeiből készíthető összegek egész számok, amiből következik, hogy a nem egész számok nem közelíthetők meg tetszőleges pontossággal.

Mivel egy pozitív p szám helyett a reciprokából, $\frac{1}{p}$-ből kiindulva ugyanazt a sorozatot kapjuk, így elegendő az olyan sorozatokat vizsgálni, amelyekre $p>1$. Ekkor az

$$1+\frac{1}{p}+\frac{1}{p^2}+\dots+\frac{1}{p^n}+\dots$$

végtelen mértani sor konvergens, összege $S=\frac{1}{1-\frac{1}{p}}=\frac{p}{p-1}$, ami azt jelenti, hogy a p nempozitív kitevőjű hatványaiból készített minden véges összeg kisebb, mint S.

Ha tehát $S<p$ (ez $p>1$ miatt pontosan akkor teljesül, ha $p>2$), akkor a sorozat elemeiből készített minden véges összeg vagy S-nél kisebb – ha nem tartalmaz pozitív kitevőjű p-hatványt –, vagy legalább p.

Ebben az esetben pedig az S-nél nagyobb és p-nél kisebb számok nem közelíthetők meg tetszőleges pontossággal.

Megmutatjuk, hogy ha $1<p\le 2$ – és így a szimmetrikus $\frac{1}{2}\le p<1$ esetben is – már bármely pozitív valós szám tetszőleges pontossággal megközelíthető. Ha $u>0$, akkor járjunk el úgy, ahogyan egy pozitív egész kettes számrendszerbeli alakját szoktuk fölírni: lépésenként a nála nem nagyobb p-hatványok közül a legnagyobbikkal csökkentsük a számot.

Könnyen meggondolható, hogy mivel a p^n, $n\in\mathbf{Z}$ sorozat szigorúan monoton növő, nem korlátos és $\lim\limits_{n\to-\infty}p^n=0$, azért létezik – pontosan egy – olyan n_1 kitevő, hogy

$$p^{n_1}\le u<p^{1+n_1}. \tag{1}$$

Mivel most $p\le 2$, azért (1)-ből $u<2p^{n_1}$, és így

$$0\le u-p^{n_1}<p^{n_1}$$

következik. Ha tehát az $u-p^{n_1}$ különbség nem nulla – ami nyilván föltehető, egyébként ugyanis az u-t *pontosan* is elő tudjuk állítani –, akkor kisebb, mint p^{n_1}, a közelítés első tagja.

Az eljárás most már folytatható az $u_1=u-p^{n_1}$ különbségre. A fentiekből következik, hogy az ehhez kiválasztott legnagyobb p-hatvány kitevője határozottan kisebb, mint n_1. Ha az eljárás véges sok lépésben leáll, akkor egyenlőséget kapunk, és így az u véges sok p-hatvány összege. Ha nem ez a helyzet, akkor a $p^{n_1}>p^{n_2}>\dots>p^{n_k}>\dots$ egész kitevőjű p-hatványok végtelen csökkenő sorozatát kapjuk, amelyekre

$$p^{n_1}+p^{n_2}+\dots+p^{n_k}<u<p^{n_1}+p^{n_2}+\dots+p^{1+n_k}$$

minden k-ra.

A két korlát eltérése $p^{n_k}(p-1)$. Mivel $n_k\le n_1-(k-1)$, azért az alsó korlát hibája legfeljebb $\frac{(p-1)\cdot p^{n_1}}{p^{k-1}}$. Itt a p és n_1 rögzített számok, a számláló konstans, a nevező pedig $p>1$ miatt tetszőlegesen nagy lehet, így a $p^{n_1}+p^{n_2}+\dots+p^{n_k}+\dots$ közelítés hibája tetszőlegesen kicsivé válik, ha k elég nagy.

Tehát az $\frac{1}{2}\le p<1$ és az $1<p\le 2$ számokra teljesül, hogy minden pozitív szám tetszőleges pontossággal megközelíthető p egész kitevőjű hatványaiból készített véges összegekkel.

Zalán Péter (Budapest, Fasori Evang. Gimn., 12. o.t.) dolgozata alapján

II. megoldás. Most is csak a $p>1$ esetben vizsgáljuk a feladat kérdését. Pozitív számok egy H halmazát hívjuk „egyenletesnek”, ha van olyan $d>0$, hogy minden pozitív számtól legfeljebb 1 távolságra található H-beli elem. Megmutatjuk, hogy ha $1<p\le 2$, akkor az $1,p,p^2,\dots,p^n,\dots$ számokból készített véges összegek halmaza egyenletes, mégpedig $d=1$ választással. Ezt az alábbi formában igazoljuk az n-re vonatkozó teljes indukcióval:

Ha $0<T<p^n$, akkor van olyan részhalmaza az $\{1,\ p,\ \dots,\ p^{n-1}\}$ halmaznak, amelyben az elemek összege 1-nél kevesebbel tér el T-től.

Ha $n=0$, akkor $0<T<1$, így az üres halmaz – amelyben az elemek összege 0 – megfelelő. Legyen most $n>0$, tegyük fel, hogy az állítás igaz minden n-nél kisebb pozitív egészre, és tekintsük a $0<T<p^n$ számot. Ha $T<p^{n-1}$ is igaz, akkor az indukciós feltevésből következik az állítás. Ha $T=p^{n-1}$, akkor az egyelemű $\{p^{n-1}\}$ halmaz megfelelő (Az eltérés 0.)

Ha $p^{n-1}<T<p^n$, akkor $0<T-p^{n-1}<p^n-p^{n-1}=(p-1)\cdot p^{n-1}$, és mivel $0<p-1\le 1$, azért $(p-1)\cdot p^{n-1}\le p^{n-1}$.

Így $0<T-p^{n-1}<p^{n-1}$, ezért az indukciós feltevés szerint a $T-p^{n-1}$ különbséget 1-nél jobban közelítő összeghez p^{n-1}-et hozzávéve, a T-t közelítő összeget kapunk.

Legyen most $u>0$ tetszőleges, és tekintsük a $T=p^N\cdot u$ számot, ahol N egész. A fentiek szerint a T-hez létezik a p nemnegatív hatványainak egy véges halmaza úgy, hogy az elemek S összegére

$$|T-S|<1.$$

Ezt az egyenlőtlenséget p^N-nel osztva kapjuk, hogy

$$\left|u - \frac{S}{p^N}\right| < \frac{1}{p^N}.$$

Mivel $p > 1$ esetén $\frac{1}{p^N}$ tetszőlegesen kicsi lehet, továbbá $\frac{S}{p^N}$ a kívánt alakú összeg, ezért $1 < p \leq 2$ esetén bármely pozitív u szám tetszőlegesen megközelíthető a p hatványaiból készített összegekkel. Megmutatjuk, hogy ha $p > 2$, akkor ez nem lehetséges. A $p^0, p^1, \ldots, p^{n-1}$ számokból 2^n összeg készíthető, ezek mindannyian 0 és $1+p+\cdots+p^{n-1} = \frac{p^n - 1}{p - 1}$ között vannak. A szomszédos összegek közti átlagos eltérés tehát $\frac{p^n - 1}{p - 1} : 2^n$, ami $p > 2$ miatt tetszőlegesen nagy lehet. Mivel a p negatív kitevőjű hatványainak összege korlátos, előbb-utóbb biztosan nem hidalhatók majd át a nemnegatív kitevőjű hatványok felhasználásával készített összegek közti eltérések.

Így $\frac{1}{2} \leq p < 1$ vagy $1 < p \leq 2$.