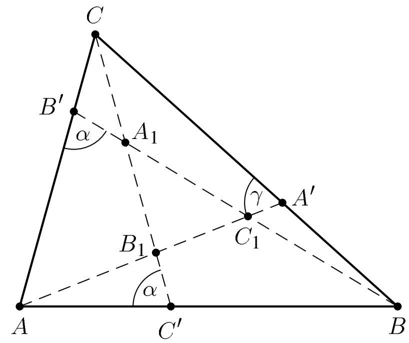
Feladatunk megfogalmazásából következik, hogy az ABC háromszög semelyik két oldala nem egyenlő. Ha ugyanis lenne két egyenlő oldala, akkor azok egymás tükörképei volnának a harmadik oldalhoz tartozó magasságvonalra nézve. Ekkor pedig az $A_1B_1C_1$ háromszög nem lehetne teljes egészében az ABC háromszög belsejében.



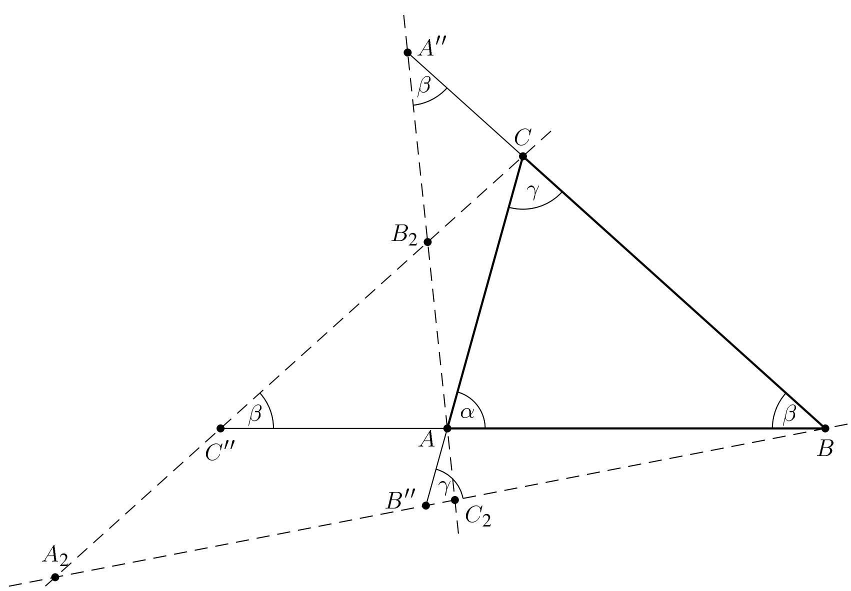
1. ábra

Jelöljük az ABC háromszög szögeit a szokásos módon α, β, γ-val. Feltehetjük, hogy $\alpha > \gamma > \beta$ teljesül. Jelöljük rendre A', B', C'-vel a $BC \cap B_1C_1$, $CA \cap C_1A_1$ és $AB \cap A_1B_1$ pontokat (*1. ábra*). Mivel az AA', BB' és CC' egyenesek az ABC háromszög egy-egy oldalának a háromszög valamelyik magasságára vonatkozó tükörképei, azért – figyelembe véve a szögek nagyságrendjét – kapjuk, hogy $AB'B\sphericalangle = B'AB\sphericalangle = \alpha$, $AC'C\sphericalangle = C'AC\sphericalangle = \alpha$ és $A'AC\sphericalangle = A'CA\sphericalangle = \gamma$. A $B'AC'A_1$ négyszögben három szög α, ezért az A_1-nél lévő szöge $360° - 3\alpha$.

Tehát $B_1A_1C_1\sphericalangle = 180° - (360° - 3\alpha) = 3\alpha - 180°$. Az $A'AB$ háromszög A'-nél lévő külső szöge γ, B-nél lévő szöge pedig β, ezért az A-nál lévő belső szöge $A'AB\sphericalangle = \gamma - \beta$. Így

$$A_1B_1C_1\sphericalangle = AB_1C'\sphericalangle = 180° - (B_1AC'\sphericalangle + AC'B_1\sphericalangle) = (\alpha+\beta+\gamma) - ((\gamma-\beta)+\alpha) = 2\beta.$$

Az $A_1C_1B_1$ szög pedig $180° - ((3\alpha - 180°) + 2\beta) = 2\gamma - \alpha$.



2. ábra

Hasonlóan számolhatjuk ki az $A_2B_2C_2$ háromszög szögeit is (*2. ábra*). $AA''B\sphericalangle = \beta$, $CC''B\sphericalangle = \beta$ és $BB''C\sphericalangle = \gamma$ (A'', B'' és C'' a tükörképek és az eredeti háromszög oldalegyeneseinek metszéspontjai), tehát

$$A_2B_2C_2\sphericalangle = B_2AC\sphericalangle + B_2CA\sphericalangle = (\gamma-\beta) + (\alpha-\beta) = 180° - 3\beta;$$
$$B_2C_2A_2\sphericalangle = 180° - A''C_2B\sphericalangle = 180° + \beta - 2\gamma;$$
$$C_2A_2B_2\sphericalangle = \beta + \gamma - \alpha.$$

Mivel $\alpha > \gamma > \beta$, azért e három szög közül a legkisebb, $\beta + \gamma - \alpha$ nem lehet $60°$-nál nagyobb, ennek kell a háromszög $20°$-os szögének lennie. A másik két szögről nem lehet eldönteni, hogy melyikük a $70°$, ezért két esetet kell megkülönböztetnünk.

i)

$$A_2B_2C_2\sphericalangle = 180° - 3\beta = 90°, B_2C_2A_2\sphericalangle = 180° + \beta - 2\gamma = 70°, C_2A_2B_2\sphericalangle = \beta + \gamma - \alpha = 20°.$$

Az egyenletrendszert megoldva $\alpha=80^\circ$, $\beta=30^\circ$ és $\gamma=70^\circ$ adódik. Ezekből kapjuk, hogy

$$A_1B_1C_1\sphericalangle=2\beta=60^\circ,\quad B_1A_1C_1\sphericalangle=3\alpha-180^\circ=60^\circ\quad\text{és}\quad A_1C_1B_1\sphericalangle=2\gamma-\alpha=60^\circ.$$

ii)

$$A_2B_2C_2\sphericalangle=180^\circ-3\beta=70^\circ, B_2C_2A_2\sphericalangle=180^\circ+\beta-2\gamma=90^\circ, C_2A_2B_2\sphericalangle=\beta+\gamma-\alpha=20^\circ.$$

Ebből az egyenletrendszerből pedig $\alpha=80^\circ$, $\beta=\left(\frac{110}{3}\right)^\circ$ és $\gamma=\left(\frac{190}{3}\right)^\circ$, tehát

$$A_1B_1C_1\sphericalangle=\left(\frac{220}{3}\right)^\circ,\quad B_1A_1C_1\sphericalangle=60^\circ\quad\text{és}\quad A_1C_1B_1\sphericalangle=\left(\frac{140}{3}\right)^\circ.$$

Könnyen ellenőrizhető, hogy mindkét eset létre is jön, ha megfelelő ABC háromszögből indulunk ki. Tehát az $A_1B_1C_1$ háromszögnek vagy minden szöge 60°, vagy pedig szögei $\left(\frac{140}{3}\right)^\circ$, 60° és $\left(\frac{220}{3}\right)^\circ$.

Rácz Béla András (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., 9. o.t.) dolgozata alapján