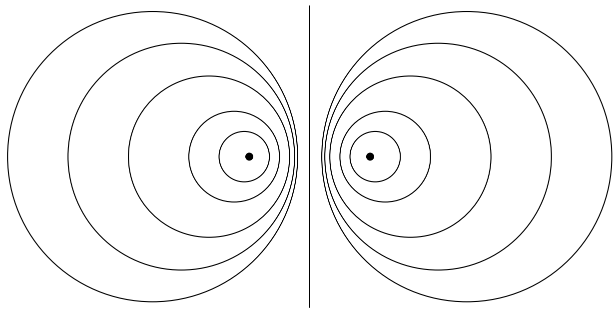
Az $(x \pm 2)^2 + y^2 - 1 = 0$ egyenletek két, egymást nem metsző és nem is érintő kör egyenletei. Ezért a sík bármely $P(x_0,\, y_0)$ pontjának koordinátái legfeljebb az egyiket elégítik ki. Legyen

$$\alpha_0 = (x_0 + 2)^2 + y_0^2 - 1 \qquad \text{és} \qquad \beta_0 = -((x_0 - 2)^2 + y_0^2 - 1). \tag{2}$$

Ekkor α és β egyszerre nem 0, és könnyű meggondolni, hogy a P pont akkor és csak akkor van rajta az (1) egyenlettel adott alakzaton, ha az $(\alpha,\, \beta)$ pár a (2) összefüggésekkel definiált $(\alpha_0,\, \beta_0)$ párból valamely számmal való szorzással keletkezik.



Azt is meg kell nézzük, hogy az így kapott egyenlet milyen α, β értékekre lesz kör egyenlete. Mivel x^2 és y^2 együtthatója megegyezik – mindkettőé $\alpha+\beta$ – azért ha ez nem 0, akkor az egyenlet vagy kör egyenlete, vagy egy ponté (a harmadik lehetőség az üres halmaz lenne – pl. $x^2+y^2+1=0$ –, de most tudjuk, hogy alakzatunk tartalmazza P-t).

Ha $\alpha + \beta = 0$, akkor az (1) egyenletet rendezve kapjuk, hogy $x = 0$. Vagyis az y tengely pontjai nincsenek rajta olyan körön, amelynek egyenlete (2) alakú.

Ha $\alpha + \beta \neq 0$, akkor az (1) által meghatározott alakzat (kör vagy pont) szimmetrikus az x tengelyre, mert ha a $Q(x_1,\, y_1)$ pont koordinátái kielégítik (1)-et, akkor a $Q'(x_1,\, -y_1)$ pont koordinátái is. Ezért ha alakzatunk egyetlen pontból áll, akkor az a pont rajta van az x tengelyen. Ha $\alpha = 0$ – és így $\beta \neq 0$ –, akkor (1) kör egyenlete. Ha a pontokat keressük, akkor tehát feltehetjük, hogy $\alpha \neq 0$, s így azt is, hogy $\alpha = 1$ (egyenletünket beszorozhatjuk $\dfrac{1}{\alpha}$-val). Rendezve az egyenletet:

$$(1+\beta)x^2 + (1+\beta)y^2 + (4\beta - 4)x + 3\beta + 3 = 0. \tag{3}$$

Ez pontosan akkor lesz egy, az x tengelyen lévő pont egyenlete, ha $y = 0$ helyettesítés után az x-re kapott másodfokú egyenletnek kétszeres gyöke van, azaz ha diszkriminánsa 0. Ebből kapjuk, hogy

$$(4\beta - 4)^2 - 4(1+\beta)(3\beta + 3) = 0,$$

azaz $\beta = 7 \pm 4\sqrt{3}$. Ezt visszaírva (3)-ba $x = \pm\sqrt{3}$ adódik. Tehát a $(\pm\sqrt{3},\, 0)$ koordinátájú pontok sincsenek rajta olyan körön, amelynek egyenlete (1) alakú.

Összefoglalva tehát az $x = 0$ egyenes pontjai, valamint a $(\pm\sqrt{3},\, 0)$ pontok felelnek meg a feladat feltételeinek.

Megjegyzés. A feladatban egy *körsorhoz* tartozó alakzatok egyenlete szerepel (a körsorokról lásd pl. *Hajós György:* Bevezetés a geometriába, 40.8). Mivel az $\alpha = 1$, $\beta = 0$ és az $\alpha = 0$, $\beta = 1$ párokhoz tartozó körök diszjunktak, azért a körsor *elliptikus*, annak semelyik két különböző eleme nem metszi egymást, a körsor elemei közt a körök mellett egy egyenes és két pont van. Az egyenes a körsor szimmetriatengelye (*ábra*).

Béky Bence (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., 11. o.t.) dolgozata alapján