

Legyenek a számok  $a_1, a_2, \dots, a_{13}$ . Feltétel szerint  $a_1 + a_2 + \dots + a_{13} = 6N$ . Vonjuk ki a számok 13. hatványának összegéből a számok összegét:

$$\begin{aligned} a_1^{13} - a_1 + a_2^{13} - a_2 + \dots + a_{13}^{13} - a_{13} + a_1 + a_2 + \dots + a_{13} &= \\ = a_1(a_1^{12} - 1) + a_2(a_2^{12} - 1) + \dots + a_{13}(a_{13}^{12} - 1) + 6N. \end{aligned}$$

Általában igaz, hogy

$$\begin{aligned} a(a^{12} - 1) &= a(a^6 - 1)(a^6 + 1) = a(a^2 - 1)(a^4 + a^2 + 1)(a^6 + 1) = \\ &= a(a + 1)(a - 1) [(a^4 + a^2 + 1)(a^6 + 1)]. \end{aligned}$$

Láthatjuk, hogy minden egyes tagban kiemelhető egy  $a_i(a_i + 1)(a_i - 1)$  alakú szorzat. Ez pedig nem más, mint 3 egymás után következő szám szorzata, ami mindig osztható 6-tal.

Mivel a tagok mindegyike osztható 6-tal, így az egész összeg is.

*Blaskó Ján* (Budapest, Szlovák Gimn., 10. o.t.)

*Megjegyzés.* A megoldás lényege az, hogy egy szám 13-dik hatványa ugyanazt a maradékot adja 6-tal osztva, mint maga a szám. Ez az állítás a megoldásban felírt algebrai azonosság mellett esetszétválasztással vagy az Euler–Fermat-tétel segítségével is bizonyítható. Ennek a 6-ra vonatkozó esete azt jelenti, hogy tetszőleges  $n$  számra  $n^3$  és  $n$  ugyanazt a maradékot adják 6-tal osztva. Ebből az  $a^{13} = a \cdot a^3 \cdot (a^3)^3$  és  $a \cdot a \cdot a^3$ , továbbá  $a \cdot a \cdot a = a^3$ , illetve  $a$  ugyanazt a maradékot adják 6-tal osztva.