I. megoldás. Jelölje M a keresett maximumot. Ekkor a KöMaL 2001/5. szám 270–281. oldalán látottak szerint M az a legnagyobb pozitív szám, amelyre az $x(x+1)(3-x)=M$ egyenletnek egynél több megoldása van (*ábra*).

Az egyenlet $x^3-2x^2-3x+M=0$ alakba írható. Ebben a formában a Cardano-formula nem alkalmazható, ehhez először a másodfokú tagot ki kell küszöbölnünk. Ezt a szokásos $t=x-\dfrac{2}{3}$ helyettesítéssel érhetjük el:

$$x^3-2x^2-3x+M=\left(x-\frac{2}{3}\right)^3-\frac{13}{3}\left(x-\frac{2}{3}\right)+M-\frac{70}{27},$$

így a keresett M számra a

$$t^3-\frac{13}{3}t+M-\frac{70}{27}=0$$

egyenletnek kétszeres gyöke van. Az ismert feltétel,

$$\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3=0$$

most $q=M-\dfrac{70}{27}$ és $p=-\dfrac{13}{3}$ helyettesítésével

$$\left(\frac{M-\frac{70}{27}}{2}\right)^2=\left(\frac{13}{9}\right)^3.$$

Ez két számra teljesül, ezek $M=\dfrac{70+26\cdot\sqrt{13}}{27}$ és $m=\dfrac{70-26\cdot\sqrt{13}}{27}$. $M>0>m$, és a módszerünkkel kapott feltétel (az $x^3-2x^2-3x+M=0$ egyenletnek kétszeres gyöke van) nemcsak az $x(1+x)(3-x)$ lokális maximumára, M-re, hanem a negatív lokális minimumra, m-re is teljesül (*ábra*).

Az $x(1+x)(3-x)$ kifejezés maximuma tehát a pozitív számok halmazán

$$M=\frac{70+26\cdot\sqrt{13}}{27}.$$

Szekeres Balázs (Szolnok, Verseghy Ferenc Gimn., 10. o.t.)

Megjegyzések. 1. A fenti okoskodásból nem derül ki – a feladat ezt nem is kérdezte –, hogy az x milyen értékére kapjuk ezt a maximumot.

2. A kétszeres gyök meglétét feltételezve az x^3-2x^2-3x+M polinom $(x-\alpha)(x-\beta)^2$ gyöktényezős alakja is elvezet a megoldáshoz.

A gyökök és együtthatók közötti összefüggések szerint ugyanis

$$\alpha+2\beta=2 \qquad \text{és}(1)\beta^2+2\alpha\beta=-3.(2)$$

Az (1) egyenletből α-t kifejezve a

$$3\beta^2-4\beta-3=0$$

egyenletet kapjuk, ennek megoldásai

$$\beta_1=\frac{2-\sqrt{13}}{3}<0<\beta_2=\frac{2+\sqrt{13}}{3}.$$

Ismét megkaptuk az $f(x)=x(1+x)(3-x)$ függvény lokális minimumát is, ez $f(\beta_1)$ (ld. *ábra*). A maximum értéke

$$f(\beta_2)=f\left(\frac{2+\sqrt{13}}{3}\right)=\frac{70+26\cdot\sqrt{13}}{27}\approx 6{,}0646.$$

3. A májusi számunkban közölt cikk bemutatja, hogy az ott vizsgált $x\cdot\dfrac{8+x}{2}\cdot\dfrac{8-x}{2}$ függvény maximuma hogyan határozható meg a számtani és mértani közepek közti egyenlőtlenség felhasználásával is. Ez akkor a tényezők szimmetriáján múlott, a függvény négyzete olyan háromtényezős szorzatként volt felírható, ahol a tényezők számtani közepe már nem függött az x-től. Ez a trükk most látszólag nem működik. Tanulságos megnézni, hogyan alkalmazható mégis, miközben ez I. megoldás t változója új szerepben tűnik fel.

II. megoldás. A $t=x-\dfrac{2}{3}$ változó bevezetésével az I. megoldásban látottak szerint $x(1+x)(3-x)=-t^3+\dfrac{13}{3}t+\dfrac{70}{27}$, azaz a vizsgált szorzat maximumához elegendő megtalálni a $g(t)=t\left(\dfrac{13}{3}-t^2\right)$ maximumát, a keresett érték ennél

$\frac{70}{27}$-del nagyobb. Az $x>0$ feltétel most $t>-\frac{2}{3}$-ot jelent, de ha $0>t>-\frac{2}{3}$, akkor $g(t)<0=g(0)$, tehát a maximumot elegendő a $t\geq 0$ halmazon keresnünk, és $\max g(t)\geq 0$.

Most már minden további nélkül alkalmazható a májusi szám cikkében látott elemi módszer, $g(t)$ a $t\geq 0$ halmazon pontosan akkor maximális, ha

$$2g^2(t)=2t^2\left(\frac{13}{3}-t^2\right)\left(\frac{13}{3}-t^2\right)$$

maximális. A pozitív tényezők összege $\frac{26}{3}$, így a számtani és mértani közepek közti egyenlőtlenség szerint

$$2g^2(t)\leq\left(\frac{26}{9}\right)^3,$$

azaz $g(t)\leq\frac{\sqrt{26^3}}{27\cdot\sqrt{2}}=\frac{26}{27}\cdot\sqrt{13}$.

Egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha $2t^2=\frac{13}{3}-t^2$, azaz $t=\frac{\sqrt{13}}{3}$.

Az $x(1+x)(3-x)$ szorzat maximuma tehát a pozitív számok halmazán $\frac{26}{27}\cdot\sqrt{13}+\frac{70}{27}$, és pontosan akkor van egyenlőség, ha $x=\frac{\sqrt{13}}{3}+\frac{2}{3}$.

Ambrus Gergely (Szeged, Radnóti M. Gimn., 12. o.t.)

Megjegyzés. Többen kísérleteztek a gyakran hatásos „határozatlan együttható” módszerével, ez azonban közvetlenül nem vezet eredményre. A módszer lényege az, hogy valamelyik tényezőt megkíséreljük egy olyan – pozitív – c szorzóval kiegészíteni, hogy az így módosított három tényező összegéből éppen kiessen a változó, a számtani és mértani közepek közti egyenlőtlenség felső becslésében konstans szerepeljen.

Az első két tényezőnél csak a triviális $c=1$ lehetséges, a harmadik tényezőre ugyan $c=2$ választással

$$x+(1+x)+\mathbf{2}(3-x)=7,$$

tehát a számtani és mértani közepek közti egyenlőtlenség szerint most

$$x(1+x)(6-2x)\leq\left(\frac{7}{3}\right)^3,$$

és így a vizsgált szorzatra

$$x(1+x)(3-x)\leq\frac{1}{2}\left(\frac{7}{3}\right)^3$$

adódik, de ebben az egyenlőtlenségben az első két tényező x és $1+x$ **nem lehetnek egyenlők**, a felhasznált egyenlőtlenségben tehát nem állhat egyenlőség, a kapott felső becslés nem a maximum, hanem csupán egy felső korlát.

A fenti módszer finomítása azonban célhoz vezet.

III. megoldás. A keresett c együtthatót bontsuk tovább két határozatlan tényező, u és v szorzatára, vizsgáljuk az $u\cdot v\cdot f(x)=(ux)\cdot(v(1+x))\cdot(3-x)$ szorzat három tényezőjét. Feltételeink a következők:

i) u és v pozitív számok;

ii) a tényezők összege, $ux+v(1+x)+(3-x)$ állandó;

iii) az $ux=v(1+x)=3-x$ egyenletrendszernek létezik pozitív megoldása. (A szorzatra kapott felső becslésben tehát elérhető az egyenlőség.)

ii)-ből $u+v=1$. Ezt *iii)*-ba helyettesítve az

$$ux=(1-u)(1+x)$$

egyenlet megoldása $x=\frac{u-1}{1-2u}$, az $ux=3-x$ egyenleté pedig $x=\frac{3}{1+u}$.

Ha ez a két megoldás egyenlő, akkor innen u-ra az

$$u^2+6u-4=0$$

egyenlet adódik, ennek pozitív gyöke $u=\sqrt{13}-3$. (Ekkor az x-re kapott mindkét tört értelmes.)

Ha most $v=1-u=4-\sqrt{13}$, akkor láthatóan v is pozitív, $ux+v(1+x)+(3-x)=3+v$, és van olyan x, mégpedig $\frac{3}{1+u}=\frac{2+\sqrt{13}}{3}$, hogy az

$$(ux)\cdot(v(1+x))\cdot(3-x)$$

szorzat tényezői egyenlő pozitív számok.

Most már alkalmazható a számtani és mértani közepek közti egyenlőtlenség,

$$\sqrt[3]{u \cdot v \cdot f(x)} \leq \frac{3+v}{3},$$

és az egyenlőség lehetséges, pontosan akkor, ha $x = \dfrac{2+\sqrt{13}}{3}$. A maximum értéke most már adódik, akár behelyettesítéssel, akár pedig úgy, hogy a jobb oldal köbét elosztjuk az uv szorzattal. Az eredmény összevonás és egyszerűsítés után $\dfrac{2}{27}(35+13\sqrt{13})$.

Márton Sándor (Szeged, Radnóti M. Gimn., 12. o.t.)