I. megoldás. Az állítást először a nem hegyesszögű háromszögekre látjuk be. Legyen például $BAC\sphericalangle \geq 90^\circ$. Ekkor A-nak a BC oldal F felezőpontjára való A_2 tükörképe a körülírt körre vagy annak belsejébe esik (*1. ábra*). Így az A_1BC háromszög tartalmazza az ABC-vel egybevágó A_2BC háromszöget, ezért a területe legalább t_{ABC}.

Ha ABC hegyesszögű, akkor az M magasságpont a belsejébe esik, és – mint ismeretes – bármelyik oldalra vagy oldalfelező pontra való tükörképe a körülírt körön van. Jelölje az M tükörképét a BC-re M_A, az F-re pedig M'_A (*2. ábra*). Mivel az AF egyenes elválasztja az M_A, M'_A pontokat, azért A_1 az $M_AM'_A$ (rövidebb) körívre esik. Így A_1-nek a BC-től való távolsága legalább akkora, mint M_A-nak (illetve M'_A-nak) a távolsága BC-től. Ezért az MBC háromszög területe legfeljebb akkora, mint az A_1BC háromszögé, és pontosan akkor egyenlők, ha $M_A = M'_A$, azaz $AB = AC$.

Hasonlóan kapjuk, hogy $T_{BMA} \leq T_{BC_1A}$ és $T_{AMC} \leq T_{AB_1C}$. A három egyenlőtlenséget összegezve a bizonyítandó állítást kapjuk, és az is látszik, hogy csak szabályos háromszögre van egyenlőség.

Nagy Ádám (Budapest, Szent István Gimn., 12. o.t.)

II. megoldás. Jelöljük a háromszög oldalait a, b, c-vel, súlyvonalait pedig s_a, s_b, s_c-vel. Legyen a BC oldal felezőpontja F, az A-ból, illetve A_1-ből a BC egyenesre bocsájtott merőlegesek talppontjai pedig T_A, illetve T_{A_1}.

Az AFB és a CFA_1 háromszögek hasonlóak, mert F-nél lévő szögük csúcsszögek, továbbá $FCA_1\sphericalangle = BAF\sphericalangle$, mert azonos íven nyugvó kerületi szögek (*3. ábra*). Ezért megfelelő oldalaik aránya megegyezik, tehát

$$\frac{A_1F}{FC} = \frac{FB}{AF},$$

ahonnan

$$A_1F = \frac{FC \cdot FB}{AF} = \frac{\frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2}}{s_a} = \frac{a^2}{4s_a}.$$

Az AT_AF és $A_1T_{A_1}F$ derékszögű háromszögek is hasonlóak, hiszen megfelelő szögeik egyenlőek. Így $\dfrac{A_1T_{A_1}}{A_1F} = \dfrac{AT_A}{AF}$, azaz

$$A_1T_{A_1} = \frac{A_1F \cdot AT_A}{AF} = \frac{a^2}{4s_a^2} \cdot AT_A. \tag{1}$$

Az AT_A, illetve $A_1T_{A_1}$ szakaszok az ABC, illetve az A_1BC háromszögek BC oldalhoz tartozó magasságai, ezért az ismert területképlet szerint

$$AT_A = \frac{2t_{ABC}}{a}.$$

Ezt behelyettesítve (1)-be és ismét alkalmazva a területképletet, kapjuk, hogy

$$t_{A_1BC} = \frac{a \cdot A_1T_{A_1}}{2} = \frac{a}{2} \cdot \frac{a^2}{4s_a^2} \cdot \frac{2t_{ABC}}{a} = \frac{a^2 \cdot t_{ABC}}{4s_a^2}.$$

Felhasználva az ismert $4s_a^2 = 2b^2 + 2c^2 - a^2$ összefüggést, innen

$$t_{A_1BC} = \frac{a^2 \cdot t_{ABC}}{2b^2 + 2c^2 - a^2}.$$

Ugyanígy felírható t_{B_1CA} és t_{C_1AB} is. A bizonyítandó állítás tehát

$$\frac{a^2 \cdot t_{ABC}}{2b^2 + 2c^2 - a^2} + \frac{b^2 \cdot t_{ABC}}{2c^2 + 2a^2 - b^2} + \frac{c^2 \cdot t_{ABC}}{2a^2 + 2b^2 - c^2} \geq t_{ABC}.$$

Mivel $t_{ABC} > 0$, azért azt kell megmutatnunk, hogy

$$S = \frac{a^2}{2b^2 + 2c^2 - a^2} + \frac{b^2}{2c^2 + 2a^2 - b^2} + \frac{c^2}{2a^2 + 2b^2 - c^2} \geq 1.$$

A számtani és a harmonikus közepek közti egyenlőtlenség szerint ha x, y, z pozitív számok, akkor

$$x + y + z \geq \frac{9}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}}.$$

Az egyenlőtlenséget az $x = \dfrac{a^2}{2b^2 + 2c^2 - a^2}$, $y = \dfrac{b^2}{2c^2 + 2a^2 - b^2}$ és $z = \dfrac{c^2}{2a^2 + 2b^2 - c^2}$ számokra felírva, ezután felhasználva, hogy egy pozitív számnak és a reciprokának az összege legalább 2, kapjuk, hogy

$$S \geq \frac{9}{\frac{2b^2+2c^2-a^2}{a^2} + \frac{2c^2+2a^2-b^2}{b^2} + \frac{2a^2+2b^2-c^2}{c^2}} == \frac{9}{2\left(\frac{b^2}{a^2} + \frac{a^2}{b^2}\right) + 2\left(\frac{c^2}{b^2} + \frac{b^2}{c^2}\right) + 2\left(\frac{a^2}{c^2} + \frac{c^2}{a^2}\right) - 3} \geq \frac{9}{2 \cdot 2 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 2 - 3} = 1.$$

Ezzel a feladat állítását beláttuk, s bizonyításunkból az is látszik, hogy egyenlőség akkor és csak akkor van, ha $a = b = c$, azaz ha ABC szabályos háromszög.

Balka Richárd (Sárvár, Tinódi S. Gimn., 12. o.t.) dolgozata alapján