Először bebizonyítjuk, hogy tetszőleges x esetén $f(x) \le 1$. Tegyük fel, hogy valamely x-re $f(x) > 1$. Ehhez találhatunk olyan pozitív y-t, amelyre $yf(x) = x + y$: ez a szám az $y = \dfrac{x}{f(x)-1}$. Behelyettesítve ezeket az értékeket (1)-be,

$$f(x)f(x+y) = f(x)f\big(yf(x)\big) = f(x+y),$$

amiből $f(x) = 1$, ez pedig ellentmondás.

Az (1) egyenletben az $f\big(yf(x)\big)$ tényező minden esetben legfeljebb 1; ebből következik, hogy tetszőleges x, y számokra $f(x+y) \le f(x)$, vagyis az f függvény monoton fogy.

Most megmutatjuk, hogy a függvény vagy konstans 1, vagy pedig minden értéke kisebb 1-nél. Ha valamely $x > 0$-ra $f(x) = 1$, akkor az egyenletből $f(2x) = f(x+x) = f(x)f(xf(x)) = 1$. Ezt a lépést ismételgetve kapjuk, hogy $f(4x)$, $f(8x)$, …mindegyike 1. A monotonitás miatt az ezeknél kisebb helyeken is csak 1 lehet a függvény értéke. Ha tehát a függvény legalább egyszer felveszi az 1-et, akkor konstans 1.

A konstans 1 függvényre teljesül az (1) függvényegyenlet. A továbbiakban azt az esetet vizsgáljuk, ha f mindegyik értéke kisebb 1-nél. Az ilyen függvényekre az előbbi módon kapjuk, hogy szigorúan monoton fogynak, és így kölcsönösen egyértelműek.

Legyen $f(1) = a$; tetszőleges $t > 0$ esetén helyettesítsük be (1)-be az $x = 1$, $y = \dfrac{t}{a}$, illetve $x = t$, $y = 1 + \dfrac{1-a}{a}t$ számokat; ezek összege egyenlő, így (1) felhasználásával:

$$f(1)f(t) = f(1)f\left(\frac{t}{a}f(1)\right) = f\left(1 + \frac{t}{a}\right) =$$
$$= f\left(t + \left(1 + \frac{1-a}{a}t\right)\right) = f(t)f\left(\left(1 + \frac{1-a}{a}t\right)f(t)\right).$$

$f(t)$-vel osztva kapjuk, hogy

$$f(1) = f\left(\left(1 + \frac{1-a}{a}t\right)f(t)\right),$$

és mivel f kölcsönösen egyértelmű,

$$1 = \left(1 + \frac{1-a}{a}t\right)f(t),$$

amiből

$$f(t) = \frac{1}{1 + \frac{1-a}{a}t}.$$

Bevezetve a $b = \dfrac{1-a}{a}$ jelölést, $f(t) = \dfrac{1}{1+bt}$, ahol $b > 0$. Behelyettesítéssel ellenőrizhető, hogy az ilyen alakú függvények is megoldások. A $b = 0$ elfajuló eset a konstans 1 függvényt adja. Az összes megoldás tehát:

$$f(t) = \frac{1}{1+bt},$$

ahol $b \ge 0$.