Legyen Q egy, a feltételeknek megfelelő pont, és legyen a gömbre vonatkozó hatványa p. Tekintsük az A, B, A_Q és B_Q pontokat.

Az ABQ és B_QA_QQ háromszögek hasonlóságából

$$A_QB_Q = \frac{B_QQ \cdot AB}{AQ} = \frac{BQ \cdot B_QQ \cdot AB}{AQ \cdot BQ} = \frac{|p| \cdot AB}{AQ \cdot BQ}.$$

Ugyanígy kapjuk, hogy

$$C_QD_Q = \frac{|p| \cdot CD}{CQ \cdot DQ}.$$

Mivel az $A_QB_QC_QD_Q$ tetraéder egyenlő oldalú, $A_QB_Q = C_QD_Q$. Behelyettesítve az előbbi eredményeket,

$$\frac{AQ \cdot BQ}{CQ \cdot DQ} = \frac{AB}{CD}.$$

Teljesen hasonlóan

$$\frac{AQ \cdot CQ}{BQ \cdot DQ} = \frac{AC}{BD} \qquad \text{és} \qquad \frac{AQ \cdot DQ}{BQ \cdot CQ} = \frac{AD}{BC}.$$

E három egyenletből kiszámíthatjuk az AQ, BQ, CQ és DQ távolságok arányát:

$$AQ : BQ : CQ : DQ = \\ = \sqrt{AB \cdot AC \cdot AD} : \sqrt{BA \cdot BC \cdot BD} : \sqrt{CA \cdot CB \cdot CD} : \sqrt{DA \cdot DB \cdot DC}.$$

Mint ismeretes, azok a Q pontok, amelyekre az $AQ : BQ$ arány egy megadott érték, egy gömbön vannak, amelynek középpontja az AB egyenesen van, és különbözik az A és B pontoktól. (Az ilyen gömböket Apollóniusz-gömböknek is nevezzük.) Ha az arány 1, akkor a gömb elfajul az AB szakasz felező merőleges síkjává. Hasonlóképpen azok a Q pontok, amelyekre az $AQ : CQ$, illetve $AQ : DQ$ arány megfelelő, vagy az AC, illetve AD szakaszok felező merőleges síkján, vagy pedig egy olyan gömbön helyezkednek el, amelynek középpontja az AC, illetve AD egyenesen van, de nem eshet ezeknek a szakaszoknak a végpontjaiba. A továbbiakban megmutatjuk, hogy ennek a három Apollóniusz-gömbnek, illetve -síknak legfeljebb két közös pontja lehet. Jelöljük a három gömböt, illetve síkot G_b-vel, G_c-vel, illetve G_d-vel.

Ha G_b, G_c és G_d egyike sem fajul el és van három közös pontjuk, akkor a közös pontokon átmenő kör mindhárom gömbre illeszkedik. A közös kör t tengelye (a kör síkjára a középpontban állított merőleges egyenes) mindhárom gömb középpontját tartalmazza. A tengely tehát tartalmazza az AB, AC, AD egyenesek egy-egy, A-tól különböző pontját. Ebből viszont következik, hogy A és t síkja tartalmazza az AB, AC és AD egyeneseket, ezáltal a B, C és D pontokat is; ez viszont ellentmond annak, hogy az A, B, C és D pontok nincsenek egy síkban.

Ha az egyik Apollóniusz-gömb, mondjuk G_b síkká fajul, akkor csak úgy lehet kettőnél több közös pontja G_c-vel és G_d-vel, ha a G_b síkot a G_c és G_d gömbök ugyanabban a körben metszik. A közös metszet-kör t tengelye átmegy a G_c és G_d gömbök középpontján, tehát metszi az AC és AD egyeneseket, tehát az ACD síkban van. Ugyanakkor t merőleges a G_b síkra, vagyis párhuzamos az AB szakasszal. Ebből ismét az következik, hogy az A, B, C és D pontok egy síkban vannak, ami ellentmondás.

Ha két Apollóniusz-gömb, például G_b és G_c fajul síkká, akkor ezek különböző irányúak, mert merőlegesek a különböző irányú AB, illetve AC szakaszokra. A két sík tehát egy egyenesben metszi egymást. Ennek az egyenesnek a G_d gömbbel legfeljebb két közös pontja lehet.

Végül, ha mindhárom Apollóniusz-gömb síkká fajul, akkor egyetlen közös pontjuk van: az $ABCD$ tetraéder körülírt gömbjének középpontja.