I. megoldás. Ha a hangya a görbe $P(a;b)$ pontjában tartózkodik, akkor az

$$x^2+bx+b^2-6=0 \qquad \text{és az} \qquad y^2+ay+a^2-6=0$$

egyenleteknek van valós gyöke – éppen a, illetve b –, és így az egyenletek diszkriminánsa, $D_b=24-3b^2$ és $D_a=24-3a^2$ nem negatív. Ha valamelyikük, például $D_a=0$, azaz $|a|=2\sqrt{2}$ (ekkor $b=-\dfrac{a}{2}$), akkor a hangya az y tengellyel párhuzamosan nem tud tovább haladni. Ez a két pont $Y_1(2\sqrt{2};-\sqrt{2})$, illetve $Y_2(-2\sqrt{2};\sqrt{2})$. Hasonlóan, amikor $D_b=0$, azaz a hangya az $X_1(\sqrt{2};-2\sqrt{2})$ vagy az $X_2(-\sqrt{2};2\sqrt{2})$ pontban van, akkor az x tengellyel párhuzamosan nem mehet tovább.

Mindez jól látható, ha meggondoljuk, hogy a szóban forgó görbe ellipszis (*1. ábra*), az X_i, Y_i pontok pedig a tengelyekkel párhuzamos érintők érintési pontjai.

Ha a hangya a fenti négytől különböző $P(a;b)$ görbepontban tartózkodik, akkor mindkét megengedett irányban el tud indulni. Ha P nem az útvonal kezdőpontja, akkor persze csak az egyik irány mentén mehet tovább, hiszen a másik irányból kellett megérkeznie.

Ha például az x tengellyel párhuzamosan a görbe $Q(c;b)$ pontjába jut, akkor a fentiek szerint $c\neq a$, és ez a két szám, a és c az $x^2+bx+b^2-6=0$ egyenlet két valós gyöke, azaz $a+c=-b$.

Hasonlóan kapjuk, hogy ha a hangya az y tengellyel párhuzamos útvonalon az $R(a;d)$ pontba lép a P-ből, akkor $d+b=-a$ (*2. ábra*).

Látható, hogy a hangya bármely lépésének végpontjai olyan pontok a görbén, amelyek összesen 4 koordinátájából kettő megegyezik, és ennek, valamint a további két koordinátának az összege 0, $a+b+c=0$ és $a+b+d=0$.

Ha tehát a hangya például az x tengellyel párhuzamosan indul el a $P_0(a;b)$ pontból, akkor útja során a következő görbepontokon halad át:

$$\begin{gathered}P_0(a;b)\to P_1(-a-b;b)\to P_2(-a-b;a)\to P_3(b;a)\to\\ \to P_4(b;-a-b)\to P_5(a;-a-b)\to P_6(a;b),\end{gathered}$$

látható tehát, hogy ha útja során nem érinti az X_i, Y_i pontok egyikét sem, akkor pontosan a hatodik lépésben megáll. Ha útközben ezek valamelyikébe jut, akkor persze már korábban is megállhat.

Babos Attila (ELTE Radnóti M. Gyak. Gimn., 12. o.t.)

Megjegyzések. 1. Könnyen látható, hogy az X_i pontokba csak az y tengellyel párhuzamosan érkezhet a hangya, az X_1-be a $B_1(\sqrt{2};\sqrt{2})$, az X_2-be pedig a $B_2(-\sqrt{2};-\sqrt{2})$ pontból. Ugyanez a két pont – azok a pontok az ellipszisen, amelyek koordinátái egyenlők –, ahonnan az Y_1 és az Y_2 pontokban eljuthatunk.

Összefoglalva tehát, ha a hangya az X_i, Y_i, B_i pontoktól különböző helyzetből indul, akkor pontosan a hatodik lépés után áll meg, a B_i pontokból indulva egy, az X_i, Y_i pontokból indulva pedig két lépés után akad el.

A lényegében helyes megoldások szerzői többé-kevésbé így okoskodtak, de szinte mindenki megfeledkezett a hangya kivételes útvonalainak vizsgálatáról.

2. A $c=-a-b$ jelöléssel a hangya útvonala – a kivételes pontoktól eltekintve – az $(a;b)$, $(c;b)$, $(c;a)$, $(b;a)$, $(b;c)$, $(a;c)$, $(a;b)$ pontokon át vezet, a pontok koordinátái között csak az a, b, c számok fordulnak elő, úgy, hogy $a+b+c=0$ (*3. ábra*). Maga az útvonal – ahogyan a görbe is – tengelyesen szimmetrikus az $y=x$ egyenletű egyenesre.

Az ilyen számhármasok érdekes kapcsolatban állnak a B. 3470. feladat egy lehetséges megközelítésével. (Lásd a megjegyzést a B. 3470. feladat III. megoldásához e szám 413. oldalán.)

Ha az $f(x)=x^3-6x$ harmadfokú polinomból indulunk ki (*4. ábra*), akkor a feladatban szereplő ellipszis egyenlete:

$$\frac{f(x)-f(y)}{x-y}=0,$$

az ellipszis pontjainak koordinátái pedig olyan $(a;b)$ számpárok, amelyekre $f(a)=f(b)$.

A szélsőértékektől eltekintve f minden többszörösen fölvett értékét háromszor veszi föl, a hangya egy adott útvonala pedig éppen egy ilyen számhármast határoz meg az út során érintett görbepontok koordinátáiként. Ebben az értelmezésben a feladat állítása nyilvánvaló.

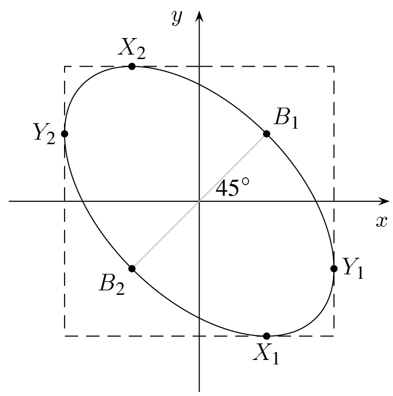
II. megoldás. Forgassuk el a görbét – és a hangya útvonalát is – (-45°)-kal, ekkor egyenlete $\dfrac{x^2}{12}+\dfrac{y^2}{4}=1$ alakú lesz (*5. ábra*).

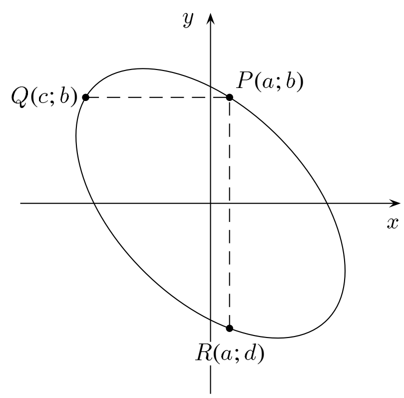
Az elforgatott útvonal egy, a koordinátatengelyekkel 45°-os szöget bezáró töröttvonal. Az ellipszis excentricitása, $\dfrac{b}{a}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$, így ha a görbére és a hangya útvonalára is $\sqrt{3}$ arányú merőleges affinitást alkalmazunk, akkor az ellipszis origó közepű körbe, a hangya útvonala pedig olyan töröttvonalba megy át, amelynek szomszédos szakaszai 60, illetve -60°-os szöget zárnak be az x tengellyel (*6. ábra*).

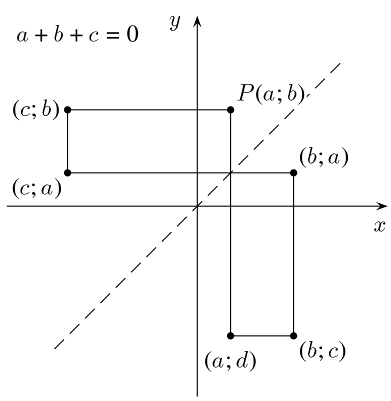
A hangya két egymást követő lépése utáni helyzetét tehát megkaphatjuk, ha útvonalának P kezdőpontját 120°-kal elforgatjuk a kör kezdőpontja körül. A forgatás iránya a hangya haladási irányától függ, és mivel az utazás során ez nem változik, hat egymást követő lépés után a hangya visszajut oda, ahonnan elindult, és így valóban megáll.

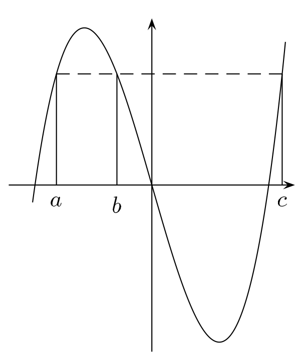
Mindez majdnem minden kezdőpontra teljesül annak a hat pontnak a kivételével, amelyek közül négyben az x tengellyel 60, illetve $-60°$-os szöget bezáró érintők érintik a kört – ezekbe a pontokba érve a hangya elakad –, kettő pedig a függőleges átmérő két végpontja – innen juthat a hangya az érintési pontokba (*7. ábra*).

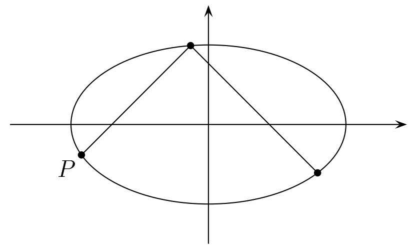
Megjegyzés. A második bizonyításból nyomban adódik – de a görbe egyenletét vizsgálva is kiderül –, hogy az állítás kizárólag az ellipszis alakján múlik, azon, hogy a kis- és a nagytengely aránya, a görbe excentricitása $1 : \sqrt{3}$.

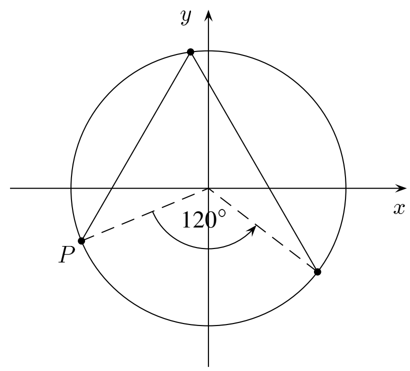









P


y
x
120°
P