I. megoldás. Vizsgáljuk először azt az esetet, amikor Pinokkiónak csak két akadállyal kell megbirkóznia, amelyeken a siker, illetve a kudarc valószínűsége s_1, s_2, illetve b_1, b_2. Ha Pinokkió pontosan k-szor bukik el a második akadályon – itt k tetszőleges természetes szám lehet –, akkor az első akadályon mindannyiszor újra át kell jutnia. Ekkor tehát a végső siker valószínűsége $p_k = s_1(b_2s_1)^k \cdot s_2$. Annak a valószínűsége tehát, hogy Pinokkió mindkét akadályon sikerrel jut át $\sum_{k=0}^{\infty} p_k$. Az összeg végtelen mértani sor, első tagja s_1s_2, hányadosa b_2s_1, ami most 0 és 1 közé esik. A sor tehát konvergens, összege

$$s = \frac{s_1s_2}{1-b_2s_1}. \tag{1}$$

A nevező $1 = b_1 + s_1$ felhasználásával $b_2 + s_1(1-b_2) = b_1 + s_1s_2$, és így

$$s = \frac{s_1s_2}{b_1+s_1s_2}. \tag{2}$$

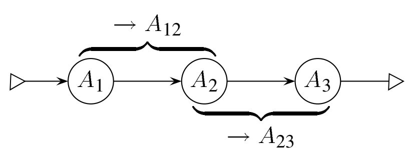
Ha bevezetjük az $s_1 * s_2 = \dfrac{s_1s_2}{b_1+s_1s_2}$ jelölést, akkor látható, hogy a $*$ művelet nem kommutatív. $s_1 * s_2$ és $s_2 * s_1$ közül a számlálók egyenlősége miatt az a nagyobb, amelyiknek a nevezője kisebb. Így $s_1 * s_2 > s_2 * s_1$ pontosan akkor teljesül, ha $b_1 < b_2$, azaz $s_1 > s_2$. Két akadály esetén tehát a könnyebb akadállyal kezdve lesz nagyobb esélye Pinokkiónak. A józan ész is ezt sugallja: érdemes a könnyebb feladatokkal kezdeni.

Megjegyzés. A talált eredmény és a tapasztalat általában is szemléletes választ sugall a feladat első kérdésére: az akadályok növekvő nehézségi sorrendjében számíthat Pinokkió a legnagyobb esélyre, és a fenti okoskodás egy teljes indukciós bizonyítás biztató kezdőlépéseként is felfogható. A gyors folytatáshoz arra volna szükség, hogy három – vagy több – akadály esetén tetszőleges sorrendben lehessen a szomszédos akadálypárok fenti „összevonásával” az akadályok számát csökkenteni. Ez azonban nem teljesül, a művelet nem asszociatív: ha például $s_1 = s_2 = s_3 = \dfrac{1}{2}$, akkor $s_1 * s_2 = s_2 * s_3 = \dfrac{1}{3}$, és így

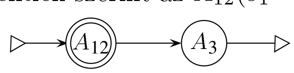
$$(s_1 * s_2) * s_3 = \frac{1}{3} * \frac{1}{2} < \frac{1}{2} * \frac{1}{3} = s_1 * (s_2 * s_3).$$

A továbblépéshez tehát az asszociativitás hiányában azt is meg kell vizsgálnunk, hogyan lehet három akadályt egyetleneggyel helyettesíteni: ebben az esetben is meg kell oldanunk a feladatot.

Legyen most három akadály, A_1, A_2, A_3 ebben a sorrendben, és rajtuk a siker és kudarc valószínűsége s_i, illetve b_i ($i = 1, 2, 3$).



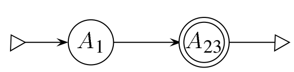
Ekkor az $(A_1(s_1),\ A_2(s_2))$ akadálypárt a fentiek szerint az $A_{12}(s_1 * s_2)$ akadállyal helyettesítve



helyes eredményt kapunk annak a valószínűségére, hogy Pinokkió eljut az A_3 akadály elé, ha azonban itt hibázik, akkor „felülről” érkezik vissza az A_{12} akadályhoz, és ebben az esetben a siker valószínűsége már nem ugyanaz az összevont és az eredeti változatban.

Megjegyzés. Könnyen meggondolható, hogy annak a valószínűsége, hogy Pinokkió „felülről” érkezve sikerrel túljut az A_1, A_2 páron, $\sum_{k=0}^{\infty} s_2(b_2s_1)^k = \dfrac{1}{s_1} \cdot (s_1 * s_2)$, így ezután az $s_1 * s_2$ helyettesítés nem jogos.

Az $(A_2,\ A_3)$, illetve az őket helyettesítő $A_{23}(s_2 * s_3)$



akadályhoz viszont Pinokkió már nem kerülhet „felülről”, hiszen ezt csak a célból visszafordulva tehetné meg. Ez azt jelenti, hogy az $A_1(s_1)$, $A_2(s_2)$, $A_3(s_3)$ akadályhármas az $A_1(s_1)$, $A_{23}(s_2 * s_3)$ akadálypárral, ez utóbbi pedig, mint láttuk, az egyetlen $A_{123}(s_1 * (s_2 * s_3))$ akadálypárral egyenértékű.

A $*$ művelet tehát $s_1 * (s_2 * s_3)$ zárójelezéssel számítja ki helyesen a három akadályon való sikeres átjutás valószínűségét, innen pedig már adódik, hogy n darab akadály esetén

$$s_1 * (s_2 * (\cdots * (s_{n-1} * s_n) \dots)) \tag{3}$$

a megfelelő zárójelezés.

A feladat megoldása ezek után kétféle módon fejezhető be. Az eddigiek és (2) alapján igazolhatjuk, hogy a (3) alatti mennyiség valóban akkor a legnagyobb, ha az akadályok növekvő nehézségi sorrendben követik egymást, majd (2) és (3) felhasználásával kiszámoljuk ezt az értéket, ha $n=9$, $s_1=\frac{9}{10}$, $s_2=\frac{8}{10}$, $\dots$, $s_9=\frac{1}{10}$. A másik lehetőségnek az látszik, hogy (2) alapján általános formulát keresünk a (3) kifejezésre, és ehhez keressük meg a maximális értéket adó elrendezést.

I. lehetőség. Mivel n darab akadálynak $n!$ darab sorrendje létezik, ezek között van olyan, amikor a (3) értéke maximális. Megmutatjuk, hogy ha ebben az esetben az s_i értékek nem csökkenő sorrendben követik egymást, azaz ha van olyan $1\le k<n$, hogy $s_k<s_{k+1}$, akkor a (3) kifejezés értéke növelhető, pontosabban

$$s_1*(s_2*(\dots s_k*(s_{k+1}*\dots*(s_{n-1}*s_n)\dots)\dots))<s_1*(\dots*(s_{k+1}*(s_k*\dots*s_n))\dots),$$

a k-adik és a $(k+1)$-edik akadály cseréjével a siker valószínűsége nő. (1)-ből látható, hogy s_1*s_2 mindkét komponensében szigorúan monoton növő, és így elegendő igazolni, hogy

$$s_k*(s_{k+1}*\dots*(s_{n-1}*s_n)\dots)<s_{k+1}*(s_k*\dots*(s_{n-1}*s_n)\dots),$$

azaz a $(k+1)$-edik utáni akadályok – ha vannak ilyenek – összevonása után $s_k<s_{k+1}$-ből

(4) $$s_k*(s_{k+1}*s)<s_{k+1}*(s_k*s)$$

következik. (Ha $k+1=n$, akkor $s=1$ választással $s_{k+1}*1=s_{k+1}$, és $s_k*1=s_k$ miatt az állítás a két tagról látottak szerint teljesül.)

(4) igazolásához egyszerűen fejtsük ki a két oldalt. (2) szerint

$$s_k*(s_{k+1}*s)=\frac{s_k\cdot(s_{k+1}*s)}{b_k+s_k\cdot(s_{k+1}*s)}=\frac{s_ks_{k+1}s}{b_kb_{k+1}+b_ks_{k+1}s+s_ks_{k+1}s}=\frac{s_ks_{k+1}s}{b_kb_{k+1}+s_{k+1}s},$$

és ezután ugyanígy

$$s_{k+1}*(s_k*s)=\frac{s_{k+1}s_ks}{b_{k+1}b_k+s_ks}.$$

Mivel a számlálók egyenlők és a feltétel miatt a második tört nevezője kisebb, az állítás valóban igaz.

Ezek után a maximális valószínűséget adó elrendezésben az akadályok lépésenként összevonhatók:

$$s_8'=s_8*s_9=\frac{2}{10}*\frac{1}{10}=\frac{1}{41};\qquad s_7'=s_7*s_8'=\frac{3}{10}*\frac{1}{41}=\frac{3}{290},\ s_6'=s_6*s_7'=\frac{4}{10}*\frac{3}{290}=\frac{1}{146};\qquad s_5'=s_5*s_6'=\frac{5}{10}*\frac{1}{146}=\frac{1}{14}$$

Pinokkió maximális esélye tehát $\frac{63}{146}\approx 0{,}4315$.

II. lehetőség. Természetesebb alakot kapunk, ha a (2) összefüggés reciprokát tekintjük:

$$\frac{1}{s_1*s_2}=1+\frac{b_1}{s_1}\cdot\frac{1}{s_2}.$$

A jobb oldal második tagjában $\frac{1}{s_2}=\frac{s_2+b_2}{s_2}=1+\frac{b_2}{s_2}$, így ha $r_1=\frac{b_1}{a_1}$ és $r_2=\frac{b_2}{a_2}$, akkor

$$\frac{1}{s_1*s_2}=1+r_1(1+r_2)=1+r_1+r_1r_2,$$

és ez pontosan akkor kisebb, mint $\frac{1}{s_2+s_1}=1+r_2+r_1r_2$, ha $r_1<r_2$, azaz $s_1>s_2$.

Innen egyszerű teljes indukcióval adódik, hogy

(5) $$\frac{1}{s_1*(s_2*\dots*(s_{n-1}*s_n)\dots)}=1+r_1+r_1r_2+\dots+r_1r_2\dots r_n,$$

ahol $r_i=\frac{b_i}{s_i}$.

A maximális valószínűséget adó elrendezést akkor kapjuk, amikor (5) jobb oldala minimális. Ha két szomszédos akadályt, a k-adikat és a $(k+1)$-ediket fölcseréljük, akkor a megfelelő összegekben azok a tagok, amelyek r_k-t és r_{k+1}-et egyszerre tartalmazzák vagy nem tartalmazzák, azonosak, így a két összeg nagyságviszonya az egy-egy megmaradó tag, $r_1r_2\dots r_{k-1}r_{k+1}$ és $r_1r_2\dots r_{k-1}r_k$ nagyságviszonyától, vagyis r_{k+1} és r_k nagyságviszonyától függ. Ha $r_{k+1}<r_k$, akkor a két akadály cseréjével a siker valószínűségének reciproka csökken, a kérdéses valószínűség tehát növekszik. A maximális valószínűséget adó elrendezésben tehát az r_i értékek növekvően, az akadályok így a siker valószínűségének csökkenő sorrendjében vannak elrendezve.

Pinokkió esetében ez az elrendezés az $r_i = \dfrac{i}{10-i}$ arányokat adja. Az $r_1 \cdot r_2 \cdot \dots \cdot r_i$ szorzat így $\dfrac{i!}{9 \cdot 8 \cdot \dots \cdot (9-i+1)} = \dfrac{1}{\binom{9}{i}}$, a maximális valószínűség tehát:

$$\left(\binom{9}{0}^{-1} + \binom{9}{1}^{-1} + \dots + \binom{9}{9}^{-1} \right) = \frac{63}{146}.$$

II. megoldás. Ha az akadályok ebben a sorrendben $A_1, A_2, \dots, A_n$, és a k-adik akadályon s_k, illetve $1-s_k = b_k$ a siker és a kudarc valószínűsége, akkor jelölje p_k annak a valószínűségét, hogy a $(k-1)$-edik akadályon túljutva Pinokkió igazi gyerek lesz. Ekkor a feladat kérdése éppen p_1-re vonatkozik. Érdemes két „mesterséges” értéket is bevezetni, ezek $p_0 = 0$ és $p_{n+1} = 1$. Előbbi azt a szomorú feltételt jelenti, hogy az első akadályon elbukva Pinokkió vállalkozása nem sikerül, utóbbi pedig azt, hogy ha az utolsó akadályon is sikerrel túljut, akkor a történet boldog véget ér.

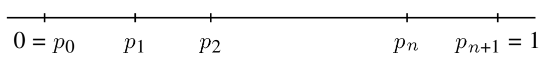
Ha Pinokkió sikerrel veszi a k-adik akadályt is – ennek s_k a valószínűsége –, akkor ezután p_{k+1} eséllyel jut a célba; ha nem – a kudarc valószínűsége a k-adik akadályon b_k –, akkor újra kell próbálkoznia a $(k-1)$-edik akadályon, ahonnan p_{k-1} a végső siker valószínűsége.

Ez azt jelenti, hogy

$$p_k = b_k \cdot p_{k-1} + s_k \cdot p_{k+1}, \qquad \text{ha } k = 1, 2, \dots, n. \tag{6}$$

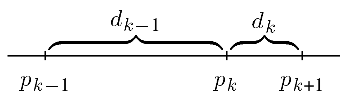
(Vegyük észre, hogy $k = 1$ és $k = n$ esetén a bevezetett $p_0 = 0$ és $p_{n+1} = 1$ értékekkel (6) szintén teljesül.)

Egy n-ismeretlenes egyenletrendszert kaptunk a bevezetett valószínűségekre, nekünk ezek egyike, p_1 értékét kell megtalálnunk. Algebrai lépések helyett nézzük meg, mit jelentenek geometriailag a (6) egyenletek.



A p_k valószínűségek jelentéséből nyilvánvaló, hogy $0 = p_0 < p_1 < \dots < p_n < 1 = p_{n+1}$, tehát a p_k számok a $[0;1]$ intervallum egy felosztását adják.

A $p_k = b_k \cdot p_{k-1} + s_k \cdot p_{k+1}$ egyenlet azt mondja, hogy a p_k szám a $[p_{k-1}; p_{k+1}]$ intervallumot



úgy osztja két részre, hogy $\dfrac{d_k}{d_{k-1}} = \dfrac{b_k}{s_k}$, azaz bevezetve az $r_k = \dfrac{b_k}{s_k}$ jelölést

$$p_{k+1} - p_k = d_k = r_k \cdot d_{k-1}. \tag{7}$$

Innen ismételt helyettesítéssel kapjuk, hogy $d_k = r_1 \cdot r_2 \cdot \dots \cdot r_k \cdot d_0$, és így $d_0 = p_1 - p_0 = p_1$, valamint $d_0 + d_1 + \dots + d_n = 1$ miatt

$$1 = d_0 + d_1 + \dots + d_n = p_1(1 + r_1 + r_1 r_2 + \dots + r_1 r_2 \dots r_n),$$

azaz

$$p_1 = \frac{1}{1 + r_1 + r_1 r_2 + \dots + r_1 r_2 \dots r_n}.$$

Lényegében az I. megoldás (5) formuláját kaptuk meg, innen a feladat megoldása az ott leírtak szerint fejezhető be.

Megjegyzések. 1. Az (7) egyenlőséget a (6) egyenletet átrendezéséből nyilván algebrai úton is megkaphatjuk.

2. Hasonlóan kapjuk, hogy a p_k valószínűségek értéke

$$p_k = p_1(1 + r_1 + r_1 r_2 + \dots + r_1 r_2 \dots r_{k-1}) = \frac{1 + r_1 + r_1 r_2 + \dots + r_1 r_2 \dots r_{k-1}}{1 + r_1 + r_1 r_2 + \dots + r_1 r_2 \dots r_n}.$$

3. Érdekes eredményhez jutunk, ha az egyes akadályokon a siker valószínűsége állandó. Ekkor $\dfrac{b_i}{s_i} = r$, és ilyenkor vizsgálhatjuk a siker valószínűségét, amennyiben az akadályok száma a végtelenhez tart. A bizonyítottak szerint n akadály esetén

$$S = S(n) = \frac{1}{1 + r + \dots + r^n}.$$

Ha $r \ge 1$ – azaz $s \le \dfrac{1}{2}$ –, akkor a nevező nem korlátos, a siker valószínűsége nullához tart, ami szomorú, de nem meglepő. Ha viszont $r < 1$, vagyis $s > \dfrac{1}{2}$, tehát Pinokkió többre képes, mint a vak véletlen, akkor a nevező konvergens, összege $\dfrac{1}{1-r}$, és így a siker valószínűsége sem csökken $1-r$ alá, akárhány akadállyal kell is szembenéznie Pinokkiónak.