Nyilván $\frac{1}{q} > |f(0)|$, ezért $f(0)=0$. Az f függvény értéke minden más helyen pozitív egész, hiszen $f(n)=0<n$ esetén

$$\frac{1}{q} > |f(n)-qn| = |-qn|$$

szerint $n < \frac{1}{q^2} < 1$, ami lehetetlen.

Könnyen ellenőrizhető továbbá, hogy $q(q-1) = \frac{\sqrt{5}+1}{2} \cdot \frac{\sqrt{5}-1}{2} = 1$. Így tetszőleges n természetes számra

$$\begin{aligned} \big|f\big(f(n)\big)-f(n)-n\big| &= \big|f\big(f(n)\big)-qf(n)+(q-1)f(n)-q(q-1)n\big| = \\ &= \big|f\big(f(n)\big)-qf(n)+(q-1)\big(f(n)-qn\big)\big|\,. \end{aligned}$$

A minden a, b valós számra teljesülő $|a+b| \le |a|+|b|$ egyenlőtlenség szerint az előbbi abszolút érték legfeljebb

$$\Big|f\big(f(n)\big)-qf(n)\Big| + \Big|(q-1)\big(f(n)-qn\big)\Big| = \Big|f\big(f(n)\big)-qf(n)\Big| + (q-1)|f(n)-qn|,$$

ami a feladat feltétele szerint $\frac{1}{q}+(q-1)\frac{1}{q} = 1$-nél kisebb. Tehát $\big|f\big(f(n)\big)-f(n)-n\big| < 1$, ami csak az $f\big(f(n)\big)-f(n)-n=0$ esetben állhat fenn, hiszen $f\big(f(n)\big)$, $f(n)$ és n egészek.

Bóka Gergely (Szolnok, Verseghy Ferenc Gimn., 10. o.t.)