A legkisebb energiát igénylő pálya megkeresésekor két szempontot is figyelembe kell vegyünk:

(i) A Mars elérésekor a szondának feltehetően marad még mozgási energiája, ez annál nagyobb, minél „kerekebb” a pálya.

(ii) Az űrszondát a Földhöz képest kell felgyorsítani, így a Föld sebessége segítheti, de nehezítheti is a pályára állást.

Az optimális átszállópálya nyilván olyan, hogy a Mars pályáját csak érinti, azaz a sebességnek ott csak érintőleges komponense van. A vizsgálandó pályákat jól jellemezhetjük a szonda N perdületével (impulzusmomentumával), ami a szonda tömegének, a Marsnál mérhető (de az állócsillagokhoz viszonyított) sebességnek és a Mars pályasugarának a szorzata! (Az N a pályára jellemző állandó, míg a szonda sebessége a pálya mentén pillanatról pillanatra változik!) A szonda energiája kifejezhető a perdülettel és a Mars R pályasugarával:

$$E(N) = -f\,\frac{Mm}{R} + \frac{N^2}{2mR^2}.$$

Itt M a Nap tömege, m az űrszonda tömege, f pedig a Newton-féle gravitációs állandó. $E(N)$ kifejezhető a pálya a fél-nagytengelyével is:

$$E(N) = -\frac{fMm}{2a},$$

így összefüggést kapunk az N és a között. Eszerint amíg

$$N < \sqrt{\frac{2fMm^2rR}{R+r}} = N_0$$

(ahol r a Föld pályasugara), addig $a < (R+r)/2$, azaz az N-nel jellemzett pálya metszi a Földét, míg az N_0-hoz tartozó pálya éppen érinti azt (*1. ábra*), az $N > N_0$ esettel pedig egyáltalán nem kell foglalkoznunk, mert ilyen pályára a Földről nem indíthatunk űrszondát.

Legyen a Föld pályájának és az „átszálló pályának” metszéspontjában a Föld sebességének nagysága v, az űrszondáé u, a pályák érintői által bezárt szög pedig α (*2. ábra*).

A szonda Földhöz képest (!) mérhető sebességének a Föld sebességével párhuzamos és arra merőleges komponensei rendre $u_1 = u\cos\alpha - v$ és $u_2 = u\sin\alpha$. Ennek megfelelően az energiaszükséglet

$$E_{\text{gy}} = \frac{1}{2}m\left[u_1^2 + u_2^2\right] = \frac{1}{2}m\left[(u\cos\alpha - v)^2 + (u\sin\alpha)^2\right] = \frac{1}{2}m\left(u^2 + v^2 - 2vu\cos\alpha\right).$$

A szonda impulzusmomentuma segítségével u^2 is és $u\cos\alpha$ is megadható:

$$\frac{1}{2}mu^2 = f\,\frac{Mm(R-r)}{Rr} + \frac{N^2}{2mR^2}, \qquad \text{illetve} \qquad mu\cos\alpha = \frac{N}{r},$$

így a minimalizálandó energia

$$E_{\text{gy}}(N) = f\,\frac{Mm(R-r)}{Rr} + \frac{N^2}{2mR^2} - \frac{vN}{r} + \frac{1}{2}mv^2 =$$
$$= \frac{1}{2mR^2}\left(N - \frac{mvR^2}{r}\right)^2 + f\,\frac{Mm(R-r)}{Rr} - \frac{mv^2R^2}{2r^2}.$$

3. ábra

Ez a kifejezés N-nek kvadratikus függvénye, melynek

$$N^* = \frac{mvR^2}{r}$$

értéknél van minimuma, így az az $N < N^*$ értékekre monoton csökkenő. Mivel $N_0 < N^*$ a $0 < N \le N_0$ pályák közül az $N = N_0$ pálya az optimális (*3. ábra*). Ezt a pályát *Hohmann-ellipszisnek* is nevezik.

$N = N_0$ mellett a pálya nagytengelye éppen $R + r$, azaz az átszállópálya nemcsak a Mars pályáját, de a Földét is érinti, és a két érintési pont a szonda pálya-ellipszis nagytengelyének két átellenes végpontja. N_0 értékét behelyettesítve némi átalakítások után

$$E_{\text{gy}} = f\,\frac{Mm}{r}\left(\sqrt{\frac{R}{R+r}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2,$$

amiből a szükséges kezdősebesség

$$v_{\text{rel}} = \sqrt{2E_{\text{gy}}/m} = 2{,}9\ \text{km/s}.$$

Ekkora sebességgel kell rendelkezzék a szonda a Földhöz képest „a Föld gravitációs terének elhagyása” (vagyis a Földtől való számottevő eltávolodása) után. Az űreszköz sebessége a Föld felszínének közelében természetesen ennél nagyobb kell legyen, hiszen a számolás során a Föld gravitációs terét nem vettük figyelembe; ez a tény azonban a fenti megfontolásokat, az optimális pálya meghatározását nem érinti.

Hátra van még annak meghatározása, hogy milyen helyzetben kell legyen a Mars az űreszköz indításakor. Jelöljük a szonda keringési idejét T-vel, a Marsét pedig T_M-mel. A szonda éppen $T/2$ ideig repül, ennyivel kell a kilövéskor a Marsnak a találkozási ponthoz (A Földdel átellenes ponthoz) képest lemaradni. Eszerint a kilövéskor a Föld–Nap–Mars szög

$$\pi\left(1-\frac{T}{T_M}\right)=\pi\left[1-\left(\frac{R+r}{2R}\right)^{3/2}\right]=0{,}774\ \text{rad}=44{,}3^\circ.$$

Geresdi Attila (Pécs, Árpád Fejedelem Gimn., 11. o.t.) és *Mics Zoltán* (Ipolyság, Magyar Tanítási Nyelvű Gimn., 12. o.t.) dolgozata alapján

Megjegyzés. A Hohmann-ellipszis a Földről indítható és a Mars pályáját elérő űrszonda-pályák közül a *legnagyobb (!)* energiájú, viszont ebben az esetben lehet a legjobban kihasználni a Föld sebességét a szonda pályára állításakor.

(W. F.)