**I. megoldás.** Ha a háromszög oldalait $a$, $b$, $c$-vel, kerületét $2s$-sel, területét pedig $T$-vel jelöljük, akkor

$$T = r \cdot s = r_a(s-a) = r_b(s-b) = r_c(s-c) = \frac{abc}{4R}. \tag{1}$$

(Ezeknek az összefüggéseknek a bizonyítása megtalálható pl. lapunk 2000/9. számának 532. oldalán.) Héron képletét, valamint (1)-et használva:

$$r_a + r_b + r_c - r = \frac{T}{s-a} + \frac{T}{s-b} + \frac{T}{s-c} - \frac{T}{s} =$$
$$= \frac{T}{T^2}\left[(s(s-b)(s-c) + s(s-a)(s-c) + s(s-a)(s-b) - (s-a)(s-b)(s-c)\right] =$$
$$= \frac{1}{T}\left[(s-(s-a))\,(s-b)(s-c) + s(s-a)\,((s-c)+(s-b))\right] =$$
$$= \frac{1}{4T}\left[a\left(a^2-(b-c)^2\right) + \left((b+c)^2-a^2\right)\cdot a\right] = \frac{1}{4T}a(4bc) = \frac{abc}{T} = 4R.$$

Vagyis a háromszög köré írható körének sugara egyszerűen kifejezhető a hozzáírt körök és a beírt kör sugarának segítségével.

Eredeti feladatunk ezek után egyszerűen megoldható a számtani és a mértani közepek közötti egyenlőtlenség, illetve annak felhasználásával, hogy a körülírt kör sugara legalább kétszerese a beírt kör sugarának.

$$\frac{r\cdot r_a\cdot r_b\cdot r_c}{R^4} \le \frac{r}{R}\cdot\left(\frac{r_a+r_b+r_c}{3R}\right)^3 = \frac{r}{R}\cdot\left(\frac{4R+r}{3R}\right)^3 =$$
$$= \frac{1}{27}\cdot\frac{r}{R}\left(4+\frac{r}{R}\right)^3 \le \frac{1}{27}\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(4+\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{27}{16}.$$

Egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha a háromszög szabályos.

**II. megoldás.** Ugyancsak az (1) összefüggéseket és Héron képletét felhasználva a bizonyítandó egyenlőtlenség

$$\frac{r\cdot r_a\cdot r_b\cdot r_c}{R^4} = \frac{T^4}{s(s-a)(s-b)(s-c)R^4} = \frac{T^2}{R^4} \le \frac{27}{16},$$

azaz $\dfrac{T}{R^2} \le \dfrac{3\sqrt{3}}{4}$ alakra hozható. Tudjuk, hogy $T = \dfrac{a\cdot b\cdot\sin\gamma}{2}$, $R = \dfrac{a}{2\sin\alpha} = \dfrac{b}{2\sin\beta}$ ($\alpha$, $\beta$, $\gamma$ a háromszög szögei), ezért elég azt bizonyítani, hogy

$$\frac{T}{R^2} = 2\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma \le \frac{3\sqrt{3}}{4}.$$

Mivel a $\sin x$ függvény a $(0,\ \pi)$ intervallumon pozitív és alulról konkáv, azért a számtani és mértani közép közötti, valamint a Jensen-egyenlőtlenséget felhasználva kapjuk, hogy

$$\sin\alpha\cdot\sin\beta\cdot\sin\gamma \le \left(\frac{\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma}{3}\right)^3 \le \left(\sin\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}\right)^3 = (\sin 60^\circ)^3 = \frac{3\sqrt{3}}{8},$$

ami ekvivalens a bizonyítandó állítással. Egyenlőség csak szabályos háromszög esetén teljesül.

*Balka Richárd* (Sárvár, Tinódi S. Gimn., 12. o.t.) dolgozata alapján