

Először megmutatjuk, hogy egy tetszőleges négyszög oldalainak négyzetösszege legalább akkora, mint a négyszög területének négyeszerese. Használjuk az *ábra* jelöléseit.

$$T_{ABCD} = T_{ABD} \pm T_{BCD} \leq T_{ABD} + T_{BCD} = \frac{a \cdot d \cdot \sin \alpha}{2} + \frac{b \cdot c \cdot \sin \gamma}{2} \leq \frac{ad + bc}{2}.$$

A mértani és a számtani közepek közötti egyenlőtlenség szerint $ad \leq \frac{a^2 + d^2}{2}$ és $bc \leq \frac{b^2 + c^2}{2}$, vagyis $4T_{ABCD} \leq a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ valóban.

Írjuk fel ezt az egyenlőtlenséget a poliéder minden lapjára, majd adjuk ezeket össze. A bal oldalon $4A$ -t kapunk, a jobb oldalon pedig $2Q$ -t, mivel minden él két laphoz tartozik a konvex poliédreben. Ezért $4A \leq 2Q$, ami 2-vel elosztva éppen a bizonyítandó állítást adja.

Babos Attila (Budapest, ELTE Radnóti M. Gimn., 12. o.t.) dolgozata alapján

