I. megoldás. Annak a valószínűsége, hogy az első dobás 1-es vagy 2-es lesz, $P_1 = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$. Annak a valószínűsége, hogy az első nem az, de a második igen, $P_2 = \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{5}$. Hasonlóan kapjuk, hogy $P_3 = \left(\frac{4}{5}\right)^2 \cdot \frac{1}{5}, \ldots, P_k = \left(\frac{4}{5}\right)^{k-1} \cdot \frac{1}{5}$.

Annak a valószínűsége tehát, hogy az elsőnek dobó játékos lesz a kalandmester,

$$p_1 = \sum_{i=0}^{\infty} P_{6i+1} = \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{4}{5}\right)^{6i} \cdot \frac{1}{5}.$$

Hasonlóan,

$$p_2 = \sum_{i=0}^{\infty} P_{6i+2} = \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{4}{5}\right)^{6i+1} \cdot \frac{1}{5} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{4}{5} \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^{6i} \cdot \frac{1}{5} = \frac{4}{5} p_1 < p_1,$$

$$p_3 = \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{4}{5}\right)^{6i+2} \cdot \frac{1}{5} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{4}{5} \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^{6i+1} \cdot \frac{1}{5} = \frac{4}{5} p_2 < p_2,$$

és ungyanígy kapjuk, hogy $p_3 > p_4 > p_5 > p_6$. Így azt javasolnám Dorottyának, hogy elsőnek dobjon.

Szalay Zsófia (Budapest, Szent István Gimn., 11. o.t.)

Megjegyzés. A szóban forgó valószínűségek pontosan kiszámíthatóak:

$$p_1 = \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{4}{5}\right)^{6i} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{5}\left(1 + \left(\frac{4}{5}\right)^6 + \left(\left(\frac{4}{5}\right)^6\right)^2 + \ldots\right) = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{1 - \left(\frac{4}{5}\right)^6} = \frac{5^5}{5^6 - 4^6} = \frac{3125}{11\,529},$$

és így tovább. Az összegük – ellenőrzésképpen – valóban 1:

$$p_1 + p_2 + \cdots + p_6 = \left(1 + \frac{4}{5} + \cdots + \left(\frac{4}{5}\right)^5\right) \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{1 - \left(\frac{4}{5}\right)^6} = \frac{\left(\frac{4}{5}\right)^6 - 1}{\frac{4}{5} - 1} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{1 - \left(\frac{4}{5}\right)^6} = 1.$$

II. megoldás. Vizsgáljuk meg annak az esélyét, hogy a k-adik dobásnál dől el a sorsolás, ekkor dobnak először 1-et vagy 2-t: a már látottak szerint $P_k = \left(\frac{4}{5}\right)^{k-1} \cdot \frac{1}{5}$, a P_k valószínűségek tehát szigorúan monoton csökkennek:

$$\underbrace{P_1 > P_2 > P_3 > P_4 > P_5 > P_6}_{\text{1. kör}} > \underbrace{P_7 > P_8 > \ldots}_{\text{2. kör}} \quad \ldots$$

Látható, hogy minden körben az először dobó játékosnak van a legnagyobb esélye a kalandmesterségre. Tehát ha Dorottya kalandmester szeretne lenni, dobjon elsőnek.

Lang Péter (Győr, Révai M. Gimn., 10. o.t.)

Megjegyzés. Sokan írták azt, hogy mivel $P_1 > P_2 > \ldots$, azért n növekedtével egyre kisebb az esélye, hogy valaki 1-et vagy 2-t dobjon. Tehát $k = 1$-re a legnagyobb ez az esély, ezért Dorottya dobjon elsőnek. Ez a fenti megoldás egy hiányos változata.