Legyen a sokszök köré írt kör sugara r, a sokszög oldalszáma pedig n. Ekkor a sokszög n darab olyan egyenlő szárú háromszögre bontható, amelyek szárszöge $\frac{2\pi}{n}$, szárainak hossza pedig r (*1. ábra*). Ezért a sokszög területe $T_n = n\cdot\frac{r^2}{2}\sin\frac{2\pi}{n}$. Tudjuk, hogy a kör területe $T_k = r^2\pi$. A sokszög akkor közelíti körülírt körének területét 1 ezreléknél kisebb hibával, ha teljesül a

$$\frac{T_k - T_n}{T_k} < \frac{1}{1000}$$

egyenlőtlenség. A területképleteket beírva és rendezve kapjuk, hogy ez pontosan akkor teljesül, ha

$$n\cdot\sin\frac{2\pi}{n} > \frac{999}{500}\pi \approx 6{,}276717. \tag{1}$$

Ha $n=81$, akkor (1) nem teljesülhet, mert $81\cdot\sin\frac{2\pi}{81} < 6{,}276887 < 6{,}2769 < \frac{999}{500}\cdot\pi$. Ha $n=82$, akkor viszont teljesül (1), mert $\frac{999}{500}\cdot\pi < 6{,}277 < 82\cdot\sin\frac{360^\circ}{82}$.

Az a szemléletesen nyilvánvaló tény, hogy az oldalszám növelésével a sokszög mind jobban közelíti a körülírt kör területét, vagyis a hiba csökken, most azzal egyenértékű, hogy az $n\cdot\sin\frac{2\pi}{n}$ az n-nek szigorúan monoton növő függvénye. A következőkben ezt igazoljuk.

Megmutatjuk, hogy $n\cdot\sin\frac{2\pi}{n}$ n-nek monoton növekvő függvénye, amiből következik, hogy (1) minden $n > 81$ egész számra teljesül.

Legyen $x = \frac{2\pi}{n}$. Elegendő azt belátnunk, hogy $\frac{\sin x}{x}$ monoton nő, ha x csökken ($0 < x < \frac{\pi}{2}$ esetén). A *2. ábrán* a $\sin x$ függvény grafikonjának egy darabja látható. Tudjuk, hogy $0 < x < \frac{\pi}{2}$ esetén $x > \sin x$, és a $\sin x$ grafikonja alulról nézve konvex. Ezért az OB_2 egyenes az A_1B_1 szakaszt egy belső P pontban metszi. Tehát ha $x_1 < x_2$, akkor

$$\frac{\sin x_1}{x_1} = \frac{A_1B_1}{OA_1} > \frac{A_1P}{OA_1} = \frac{A_2B_2}{OA_2} = \frac{\sin x_2}{x_2},$$

amit bizonyítani akartunk.

Tehát a legalább 82 oldalú szabályos sokszögek 1 ezreléknél kisebb hibával közelítik körülírt körük területét.

Kiss-Tóth Christian (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., 8. o.t.) dolgozata alapján

Megjegyzés. Nem egészen magától értetődő, hogy hogyan keressük meg az $n=81$ értéket. Kalkulátorral és némi türelemmel viszonylag gyorsan eljuthatunk ehhez az értékhez, de némi háttérismeret birtokában gyorsabban találjuk meg a keresett küszöböt.

Ismeretes, hogy ha x valós szám, akkor annak a szögnek a szinusza, amelynek x az ívmértéke, az alábbi végtelen sor öszege:

$$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + \dots$$

Erre persze most nincs igazán szükség, csak arra, hogy a váltakozó előjelű tagok hozzávételével felső, illetve alsó becslések (egyre finomodó) sorozatát nyerjük.

Minden pozitív x-re fennáll ezért a

$$\sin x > x - \frac{x^3}{3!} \tag{$*$}$$

egyenlőtlenség, ahonnan $x>0$-val osztva $\frac{\sin x}{x} > 1 - \frac{x^2}{6}$.

Ha most a vizsgált $n\cdot\sin\frac{2\pi}{n} > \frac{999}{500}\pi$ egyenlőtlenséget a

$$\frac{\sin\frac{2\pi}{n}}{\frac{2\pi}{n}} > 0{,}999$$

alakba írjuk, akkor ez bizonyosan teljesül, ha

$$1 - \frac{\left(\frac{2\pi}{n}\right)^2}{6} > 0{,}999,$$

ahonnan rendezés után

$$n > \frac{2\pi}{\sqrt{0{,}006}} \approx 81{,}12.$$

(1) tehát biztosan teljesül, ha $n \geq 82$, az pedig, hogy $n = 81$-re nem teljesül, akár a kalkulátorral, akár pedig a $(*)$ egyenlőtlenség hibájának ismeretében – ez a hiba kisebb a következő tag, $\dfrac{x^5}{5!}$ abszolút értékénél – gyorsan eldönthető.