Jelöljük az A, B, C csúcsok közös szomszédját O-val. Az $OABC$ tetraéder térfogata $\frac{1}{6}\cdot OA\cdot OB\cdot OC=\frac{1000}{6}<\frac{251}{251+248+251}\cdot 1000$, ezért az $\mathcal{S}_1$ sík O-tól távolabb van, mint az ABC sík. Messe az $\mathcal{S}_1$ az O-ból induló kockaéleket rendre az A_1, B_1, C_1 pontokban. Az $OA_1B_1C_1$ tetraéder O-ból induló élei egyenlő hosszúak. Legyen $AA_1=BB_1=CC_1=x$. Ekkor az $\mathcal{S}_1$ által a kockából levágott rész térfogatát – azaz az $OA_1B_1C_1$ tetraéder és a kocka közös részének térfogatát – megkapjuk, ha az $OA_1B_1C_1$ tetraéder térfogatából levonjuk az A, B és C csúcsoknál a kocka lapjai által a nagy tetraéderből levágott három kis tetraéder térfogatát (*1. ábra*). E kis tetraéderek A-ban, B-ben, illetve C-ben találkozó élei páronként merőlegesek egymásra, hosszuk pedig $x-10$, ezért az $\mathcal{S}_1$ által a kockából levágott rész térfogata:

$$\frac{1}{6}x^3-3\cdot\frac{1}{6}(x-10)^3.$$

A feltétel szerint ez a kocka térfogatának $\frac{251}{750}$ része, tehát

$$\frac{1}{6}x^3-3\cdot\frac{1}{6}\cdot(x-10)^3=\frac{251}{750}\cdot 1000.$$

Ezt az egyenletet rendezve kapjuk, hogy

$$x^3-45x^2+450x-496=0.$$

A harmadfokú egyenleteknek is van – a másodfokúakhoz hasonlóan – általános megoldóképlete. Ezt az egyenletet azonban annak ismerete nélkül is megoldhatjuk. Ha az egyenletnek van egész gyöke, akkor az osztja a 496-ot, az egyenlet konstans tagját. $496=2^4\cdot 31$, az osztókat megvizsgálva kapjuk, hogy $x=31$ gyöke az egyenletnek. Ezután az egyenlet bal oldala szorzattá alakítható:

$$x^3-45x^2+450x-496=(x-31)(x^2-14x+16).$$

Tehát az egyenlet gyökei: $x_1=31$, $x_{2,3}=7\pm\sqrt{33}$.

Mivel az $\mathcal{S}_1$ sík O-tól távolabb van, mint az ABC sík, de közelebb van O-hoz, mint a kocka O-val átellenes csúcsához, azért $10<x<\frac{10\sqrt{3}}{2}$. Ezeknek a feltételeknek csak az $x=7+\sqrt{33}$ megoldás felel meg. A kocka középpontos szimmetriája miatt az $\mathcal{S}_2$ sík is ugyanakkora szakaszokat vág le a kocka O-val átellenes csúcsából kiinduló élekből. A két sík távolságát megkapjuk, ha a kocka testátlójának hosszából levonjuk az $OA_1B_1C_1$ tetraéder O-hoz tartozó magasságának kétszeresét.

Az $A_1B_1C_1$ szabályos háromszög oldala $x\cdot\sqrt{2}$, ezért a háromszög területe $\frac{x^2\cdot 2\cdot\sqrt{3}}{4}$. Ha az O-hoz tartozó magasságot m-mel jelöljük, akkor a tetraéder térfogatát kétféleképpen felírva kapjuk, hogy

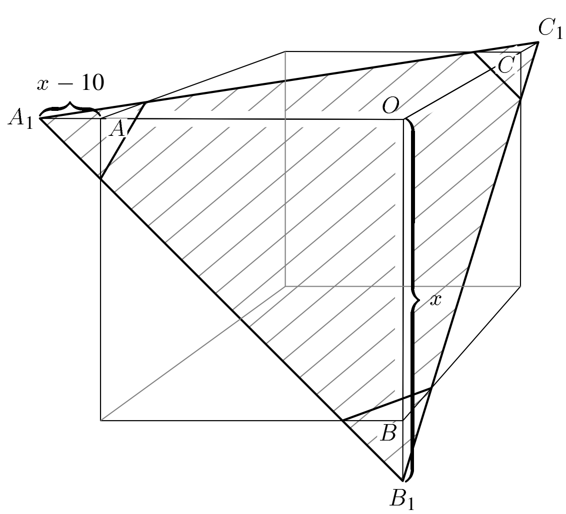
$$\frac{1}{3}\cdot\frac{x^2\cdot 2\sqrt{3}}{4}\cdot m=\frac{1}{6}\cdot x^3,$$

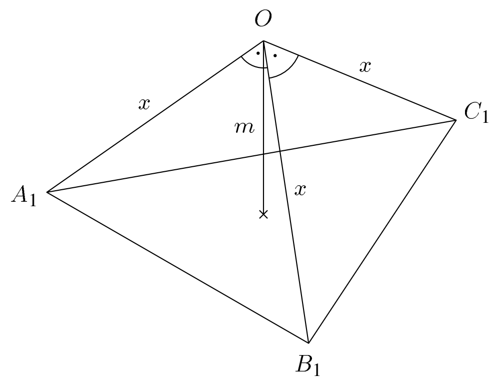
tehát $m=\frac{x}{\sqrt{3}}=\frac{7\sqrt{3}}{3}+\sqrt{11}$.

Vagyis az $\mathcal{S}_1$ és $\mathcal{S}_2$ síkok távolsága

$$10\sqrt{3}-2m=\frac{16\sqrt{3}}{3}-2\sqrt{11}\approx 2,6044 \text{ egység.}$$

Horváth Illés (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., 11. o.t.) dolgozata alapján





O
x
x
C_1
m
A_1
x
B_1