I. megoldás. Végezzük el az alábbi ekvivalens átalakításokat a feladat kiinduló azonosságán:

$$\frac{1}{a+b+c}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c},$$

ahol $a+b+c\neq 0$, $a\neq 0$, $b\neq 0$, $c\neq 0$.

$$\begin{gathered}abc=(a+b+c)(ab+ac+bc)=a^2b+a^2c+abc+ab^2+abc+b^2c+abc+ac^2+bc^2\\ 0=(a^2b+a^2c)+(abc+ac^2)+(ab^2+abc)+(b^2c+bc^2)=\\ =(b+c)(a^2+ac+ab+bc)=(b+c)(a+c)(a+b).\end{gathered}$$

Egy szorzat csak akkor lehet 0, ha valamelyik tényezője 0, így vagy $b=-c$, vagy $a=-c$, vagy $a=-b$. Tegyük fel, hogy például $b=-c$. Ekkor viszont bármilyen n pozitív szám esetén $b^{2n+1}=-c^{2n+1}$ és $\frac{1}{b^{2n+1}}=-\frac{1}{c^{2n+1}}$, így

$$\frac{1}{a^{2n+1}+b^{2n+1}+c^{2n+1}}=\frac{1}{a^{2n+1}}=\frac{1}{a^{2n+1}}+\frac{1}{b^{2n+1}}+\frac{1}{c^{2n+1}}.$$

Hasonlóan bizonyíthatunk $a=-c$ vagy $a=-b$ esetén is. $n=2$-re kapjuk a feladat állítását.

II. megoldás. Az I. megoldás szerint írjuk át a kiinduló feltételt

$$abc=(a+b+c)(ab+ac+bc) \tag{$*$}$$

alakba!

Tekintsünk most egy harmadfokú egyenletet, amelynek a, b és c a gyökei:

$$\begin{gathered}(x-a)(x-b)(x-c)=0\\ x^3-(a+b+c)x^2+(ab+ac+bc)x-abc=0\end{gathered}$$

Használjuk fel $(*)$-ot:

$$\begin{gathered}x^2[x-(a+b+c)]+(ab+ac+bc)[x-(a+b+c)]=0\\ [x-(a+b+c)][x^2-(ab+ac+bc)]=0.\end{gathered}$$

Tehát a harmadfokú egyenlet egyik gyöke $a+b+c$. Ebből az következik, hogy vagy $a=a+b+c$, vagy $b=a+b+c$, vagy $c=a+b+c$. A bizonyítást az I. megoldáshoz hasonlóan fejezhetjük be.

Pusztai Erika (Budapest, Batthyány Lajos Gimn., 10. o.t.) dolgozata alapján