I. megoldás. Az n-re vonatkozó teljes indukcióval igazoljuk, hogy ha $1 \le i \le j \le n$, akkor a H_i és a H_j halmazok elemei 2-nél kisebb pozitív valós számok és nincs köztük egyenlő.

Ha $n = 1$, akkor ez nyilvánvaló. Legyen most $n > 1$ és tegyük fel, hogy az állítás igaz az n-nél kisebb sorszámú halmazokra. A H_n halmaz az $x_n = \sqrt{2 \pm x_{n-1}}$ alakú számokból áll, ahol $x_{n-1} \in H_{n-1}$. Az indukciós föltevés szerint $0 < 2 - x_{n-1} < 2 + x_{n-1} < 4$, és így a H_n elemei is 2-nél kisebb pozitív számok. Meg kell még mutatnunk, hogy a H_n elemei között nincsenek egymással vagy pedig egy kisebb sorszámú H-beli elemmel egyenlő számok.

Tegyük fel, hogy ez nem igaz, vagyis hogy létezik olyan $1 \le i \le n$, hogy $x_i = x_n$ valamilyen $x_i \in H_i$ és $x_n \in H_n$ esetén. (Két H_n-beli szám egyenlősége úgy értendő, hogy különböző előjelsorozatok kiértékelésével kapjuk ugyanazt az értéket.)

Ha $i = 1$, akkor $H_1 = \{\sqrt{2}\}$ miatt indirekt feltevésünk a

$$\sqrt{2} = \sqrt{2 \pm x_{n-1}}$$

egyenlőséget jelentené, ami nem lehetséges, mert az indukciós feltevés szerint $x_{n-1} \ne 0$.

Ha $1 < i$, akkor $x_i = \sqrt{2 \pm x_{i-1}}$ és $x_n = \sqrt{2 \pm x_{n-1}}$, ahol $x_{i-1} \in H_{i-1}$. Négyzetre emelés után $|x_{i-1}| = |x_{n-1}|$ következik, ami azt jelenti, hogy $x_{i-1} = x_{n-1}$, hiszen ezek a számok pozitívak. Ezek a számok az indukciós feltevés szerint biztosan nem egyenlők, ha $i < n$, hiszen ekkor x_{i-1} és x_{n-1} különböző H halmazból valók, és így különbözők. Az egyetlen lehetőség, hogy két különböző módon kiszámolt H_n-beli szám, x_n' és x_n'' egyenlő, de ekkor a fentiek szerint ez csak úgy lehetséges, ha közös H_{n-1}-beli „ősük” van:

$$x_n' = \sqrt{2 + x_{n-1}} \qquad \text{és} \qquad x_n'' = \sqrt{2 - x_{n-1}}.$$

Mivel $x_{n-1} \ne 0$, ez az egyenlőség sem lehetséges.

A H_i halmaznak tehát 2^{i-1} eleme van, és mivel a H_n $(1 \le n \le 2000)$ halmazok elemei között nincsenek egyenlők, az

$$\bigcup_{n=1}^{2000} H_n$$

halmaznak $\displaystyle\sum_{n=1}^{2000} 2^{n-1} = 2^{2000} - 1$ eleme van.

II. megoldás. Az alábbi – talán bonyolultabb – megoldásban érdekes előállítását adjuk a H_n halmaz elemeinek, amiből következik majd, hogy nincsenek köztük egyenlő számok.

Legyenek az a_i számok egymástól függetlenül ± 1-gyel egyenlők. Ha még a H_n halmaz elemeinek az ellentettjét is elkészítjük, akkor az $a_1\sqrt{2 + a_2\sqrt{2 + \dots + a_n\sqrt{2}}}$ alakú számokat kapjuk.

Ha R_n jelöli az $r_n = a_1 + \dfrac{a_1a_2}{2} + \dfrac{a_1a_2a_3}{4} + \dots + \dfrac{a_1a_2\dots a_n}{2^{n-1}}$ alakú számok halmazát, akkor az n-re vonatkozó teljes indukcióval igazoljuk, hogy

$$a_1\sqrt{2 + a_2\sqrt{2 + \dots + a_n\sqrt{2}}} = 2\sin r_n \cdot \frac{\pi}{4}. \tag{$*$}$$

Mivel $-2 < r_n < 2$, azért $-\dfrac{\pi}{2} < r_n \cdot \dfrac{\pi}{4} < \dfrac{\pi}{2}$. Ezen az intervallumon a szinuszfüggvény kölcsönösen egyértelmű (szigorúan monoton növő), ezért a H_i halmazok vizsgálata a fenti jellemzés szerint a megfelelő R_i halmazok vizsgálatára vezethető vissza: az R_i halmazok elemei a $\pm 1 \pm \dfrac{1}{2} \pm \dots \pm \dfrac{1}{2^{i-1}}$ alakú számok, az pedig könnyen látható, hogy az R_i halmaznak 2^i darab eleme van, és az R_i halmazok diszjunktak.

Következik a $(*)$ azonosság bizonyítása.

Ha $n = 1$, akkor $r_1 = a_1$, és azt kell megmutatnunk, hogy

$$a_1\sqrt{2} = 2\sin a_1\frac{\pi}{4}.$$

Mivel a szinuszfüggvény páratlan, $\sin a_1 \cdot x = a_1 \cdot \sin x$, tehát a jobb oldalon $a_1 2\sin\dfrac{\pi}{4} = a_1 2\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ áll, $(*)$ tehát igaz, ha $n = 1$. Legyen most $n > 1$. Ekkor, amint az könnyen ellenőrizhető, $r_n = a_1\left(1 + \dfrac{r_{n-1}}{2}\right)$, ahol $r_{n-1} \in R_{n-1}$.

Így $2\sin r_n \cdot \dfrac{\pi}{4} = 2\sin a_1\left(1 + \dfrac{r_{n-1}}{2}\right)\dfrac{\pi}{4} = 2a_1\sin\left(1 + \dfrac{r_{n-1}}{2}\right)\dfrac{\pi}{4}$. Ismeretes, hogy $\sin\alpha = \pm\sqrt{\dfrac{1 - \cos 2\alpha}{2}}$, amit most $2\sin\alpha = a_1\sqrt{2 - 2\cos 2\alpha}$ alakba írhatunk $(a_1 = \pm 1)$. Most $\alpha = \left(1 + \dfrac{r_{n-1}}{2}\right) \cdot \dfrac{\pi}{4}$, így

$$2\sin r_n \cdot \frac{\pi}{4} = a_1\sqrt{2 - 2\cos\left(\frac{r_{n-1}}{2} + 1\right) \cdot \frac{\pi}{2}}.$$

Mivel $\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=-\sin x$, azért

$$2\sin r_n\frac{\pi}{4}=a_1\sqrt{2+2\sin\frac{r_{n-1}}{2}\cdot\frac{\pi}{2}}=a_1\sqrt{2+2\sin r_{n-1}\cdot\frac{\pi}{4}}.$$

A négyzetgyök alatt az indukciós feltevés szerint

$$2+a_2\sqrt{2+a_3\sqrt{2+\cdots+a_n\sqrt{2}}}$$

áll, így $(*)$ bizonyítását befejeztük.

Pallos Péter (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., 10. o.t.) megoldása alapján

Megjegyzés. Ha bevezetjük a $p_1(x)=x^2-2$ és a $p_n(x)=p_{n-1}^2(x)-2=p_1(p_{n-1}(x))$ polinomokat, akkor könnyen látható, hogy a H_n halmaz elemei és azok ellentettjei a 2^n-edfokú $p_n(x)$ polinom gyökei. Ezek a polinomok szoros kapcsolatban vannak az ún. *Csebisev*-polinomokkal. Ismeretes, hogy adott n természetes számra $\cos nx$ felírható $\cos x$ n-edfokú polinomjaként: $\cos 0x=1=T_0(x)$, $\cos 1x=\cos x$ miatt $T_1(x)=x$, $\cos 2x=2\cos^2 x-1$ miatt $T_2(x)=2x^2-1$ és általában, az n-edfokú T_n Csebisev-polinomra

$$\cos nx=T_n(\cos x).$$

A fenti $p_1(x)$ polinom éppen $2T_2\left(\frac{x}{2}\right)$, és nyomban adódik, hogy a 2^n-edfokú $p_n(x)$ polinom nem más, mint $\frac{1}{2}T_{2^n}(2x)$. Ez viszont azt jelenti, hogy

$$p_n(2\cos x)=2\cdot\cos 2^n x. \tag{1}$$

Ennek az összefüggésnek az alapján fel tudunk írni trigonometrikus alakban 2^n darab számot, amelyek valamennyien gyökei a $p_n(x)$ polinomnak. Így viszont a polinom minden gyökét felsoroljuk, hiszen a $p_n(x)$ polinom foka éppen 2^n. Erre azért van jogos reményünk, mert tudjuk, hogy a H_n halmaz elemei és azok ellentettjei a $p_n(x)$ polinom gyökei, ezek a számok pedig, mint láttuk, -2 és 2 közé esnek, és így $2\cos x$ alakba írhatók.

Így x-nek azokat az értékeit keressük, amelyekre $2\cos 2^n x=0$; ha x_i egy ilyen szám, akkor $2\cos x_i$ a $p_n(x)$ polinom gyöke.
$\cos 2^n x=0$ pontosan akkor, ha $2^n x=k\frac{\pi}{2}$, ahol k páratlan egész szám, így $p_n(x)$-nek gyökei a

$$2\cos k\cdot\frac{\pi}{2^{n+1}}$$

alakú számok, ahol k páratlan. Ha $1\le k<2^{n+1}$, akkor $0<k\frac{\pi}{2^{n+1}}<\pi$, így mivel a koszinuszfüggvény a $[0;\pi]$ intervallumon szigorúan monoton fogyó, a felsorolt 2^n darab szám között nincsenek egyenlők, megkaptuk a $p_n(x)$ polinom gyökeit. E 2^n darab szám fele pozitív, azok, amelyekre $k<2^n$, ami azonnal megmutatja, hogy a H_n halmaznak 2^{n-1} darab eleme van.

Végül az, hogy a H_n és a H_m halmazok diszjunktak, közvetlenül adódik ezeknek a számoknak a fenti trigonometrikus alakjából. Ha $n\ne m$, k és l páratlanok, akkor a $\frac{k\pi}{2^{n+1}}$ és az $\frac{l\pi}{2^{m+1}}$ argumentumoknak mind az összege, mind pedig a különbsége $\frac{p}{q}\pi$ alakú, ahol q 2-hatvány, p pedig páratlan. Mivel két szám koszinusza pontosan akkor egyenlő, ha a számoknak vagy az összege, vagy pedig a különbsége π páros többszöröse, így most valóban nem teljesülhet egyenlőség.