Jelöljük az n-elemű halmazt S-sel, elemei legyenek $x_1, \ldots, x_n$.

Könnyen ellenőrizhető, hogy megfelelő az a két felbontás, amikor az összes részhalmaz H-ba, illetve I-be kerül, azaz H és I valamelyike üres. Nevezzük ezeket triviális felbontásoknak. A továbbiakban pontosan leírjuk, mik azok a nemtriviális felbontások, amelyekben sem H, sem I nem üres.

Először megmutatjuk, hogy egy nem triviális felbontásban $\emptyset \in H$ és $S \in I$. Legyen ugyanis $h \in H$ és $i \in I$ két tetszőleges halmaz; ekkor $\emptyset = \emptyset \cap h \in H$ és $S = S \cup i \in I$ az a), b) és c) tulajdonságok miatt.

Tegyük fel, hogy $n \geq 1$, és tekintsük most az $\{x_1\}, \ldots, \{x_n\}$ egyelemű részhalmazokat. Azt állítjuk, hogy ezek közül pontosan egy tartozik I-be. Ha mindegyik egyelemű halmaz H-ba tartozna, akkor a c) tulajdonság miatt az $(\{x_1\} \cup \{x_2\}) \cup \cdots \cup \{x_n\} = S$ halmaz is H-ban lenne, ami ellentmondás. Az egyelemű részhalmazok között tehát van olyan, ami I-be tartozik. Ha az egyelemű halmazok közül legalább kettő tartozna I-be, akkor az a) tulajdonság miatt ezek metszete, $\emptyset$ is I-beli lenne, ami szintén ellentmondás.

Legyen $\{x_j\}$ az az egyelemű halmaz, amely I-be tartozik. Az a) és b) tulajdonságok alapján megállapíthatjuk, hogy minden olyan r részhalmaz, amelynek x_j eleme, I-be tartozik; ugyanis $r = r \cup \{x_j\}$.

Megfordítva, ha egy r részhalmaznak x_j nem eleme, akkor $r \in I$ nem lehetséges, ugyanis $r \in I$ esetén az a) tulajdonság alapján $r \cap \{x_j\} = \emptyset$ is I-beli lenne. Azt kaptuk tehát, hogy egy r halmaz akkor és csak akkor tartozik I-be, ha $x_j \in r$. A nemtriviális felbontások száma tehát a lehetséges x_j-k száma, azaz n.

Az $n = 0$, azaz $S = \emptyset$ esetben a két triviális felbontás ugyanaz: $I = H = \emptyset$ és más felbontás nincs; az összes felbontások száma tehát 1. Ha $n = 1$, akkor a két triviális felbontás különböző, és más felbontás nincs, így a felbontások száma 2. Ha $n > 1$, akkor a két triviális felbontás különböző, az összes felbontások száma $n + 2$.