

Előzetes megjegyzés. A klasszikusnak számító „benzinkutas feladatban” azt kell igazolni, hogy ha a benzinkutakban található üzemanyag összesen legalább egy kör megtételére elegendő, akkor mindkét irányhoz létezik olyan benzinkút, amelyből indulva az autó körbeérhet. Ennek a feladatnak több érdekes megoldása is ismert; most csak egy egyszerű teljes indukciós bizonyítást mutatunk. A témáról részletesebben például Bizám György és Herczeg János *Sokszínű logika* c. könyvében olvashatunk.

Legyen a körjárárs irányja rögzített; a megfelelő benzinkút létezését a benzinkutak száma szerinti indukcióval igazoljuk. Ha csak egyetlen benzinkút van, akkor ebben található az összes üzemanyag, amely a feltétel szerint legalább egy teljes kör megtételére elegendő, kész vagyunk.

Legyen a benzinkutak száma n , és tegyük fel, hogy ennél kevesebb benzinkút esetén mindig létezik a megfelelő kiindulópont. A benzinkutak között lehetnek olyanok, amelyekből nem lehet a következő benzinkutat sem elérni; az ezekben levő üzemanyag mennyisége kevesebb, mint amennyi a soron következő útszakasz megtételéhez szükséges. Az ilyen benzinkutakban összesen biztosan kevesebb üzemanyag van, mint amennyi a teljes kör megtételéhez szükséges. Következésképpen van olyan benzinkút is, ahonnan el lehet érni a következő kútát. Legyen A egy ilyen kút, a következő kút pedig legyen B . Jelöljük a két kútban található üzemanyag mennyiségét a -val, illetve b -vel.

Helyezzük át a B -ben található üzemanyagot A -ba, és a B kútát szüntessük meg (1. ábra). A benzinkutak száma csökkent, az indukciós feltevés szerint van tehát egy olyan K kút, ahonnan indulva körbe lehet utazni. Azt állítjuk, hogy K az eredeti A és B benzinkutak esetében is megfelelő. Induljunk el K -ből. Amikor eljutunk A -ba, az ott felvett a üzemanyaggal biztosan eljutunk B -be is, ott pedig felvesszük a b üzemanyagot. B elhagyásakor pontosan ugyanannyi üzemanyagunk lesz, mintha már A -ban felvettük volna az $a + b$ üzemanyagmennyiséget; ezután pontosan ugyanaz történik, mint a módosított esetben. A K kút tehát valóban megfelelő.

I. megoldás. Ismét a benzinkutak száma szerinti teljes indukcióval bizonyítunk. Egy kút esetén az állítás triviális.

Ha mindegyik benzinkútban elég üzemanyag van ahhoz, hogy bármelyik irányban eljussunk a következő kútig, akkor bármelyik kúttól bármelyik irányban indulva biztosan körbeérünk. Feltehetjük tehát, hogy létezik egy kút a kör A pontjában, ahonnan az egyik irányban nem juthatunk el a szomszédos kútig, ami B -ben van. A kutakban levő üzemanyag mennyisége legyen a és b . Feltételezzük, hogy $a \leq b$; ellenkező esetben az A és a B szerepe felcserélhető.

Jelölje C azt a pontot, ameddig A -ból B felé elindulva az a üzemanyaggal eljuthatunk. Csökkentsük le az üzemanyag mennyiségét az A , illetve B benzinkutakban 0-ra, illetve $(b - a)$ -ra, továbbá az AB ívet rövidítsük le az AC távolsággal (2. ábra). Ekkor továbbra is kétszer annyi üzemanyag van, mint amennyi a (lerövidített) kör megtételéhez szükséges, viszont az A benzinkút kiürítése révén a nem üres benzinkutak száma 1-gyel csökkent. Az indukciós feltevés szerint tehát létezik egy olyan K benzinkút, ahonnan elindulva mindkét irányban körbehaladhatunk. Megmutatjuk, hogy ez a kút az eredeti körön is jó lesz.

Ha K -ből elindulunk valamelyik irányban, akkor előbb-utóbb eljutunk az iránytól függően A -ba vagy B -be; eddig a pontig nincs különbség a kétféle utazás között. Az A vagy B pontba érve az eredeti állapotban a -val több üzemanyagot vehetünk fel, és az AB szakasz is éppen annyival hosszabb, amire ez a többlet üzemanyag elegendő. Az AB szakasz elhagyása után mindig a -val több üzemanyagunk lesz, mint a lerövidített körön. A K kút tehát megfelelő.

II. megoldás. Nevezzük a két lehetséges irányt pozitívnak, illetve negatívnak. Tekintsük azokat a kutakat, amelyek „rosszak” olyan értelemben, hogy onnan pozitív irányban elindulva nem érhetünk körbe. Ha az ezekben levő üzemanyag legalább egy kör megtételére elegendő, az a klasszikus feladat szerint ellentmondás; ha csak ezen kutak üzemanyagát használjuk fel, akkor is van olyan, ahonnan pozitív irányban körbeérhetünk. A kiválasztott kutakban található üzemanyag tehát kevesebb, mint amennyi egy teljes kör megtételéhez szükséges.

Hasonlóan láthatjuk, hogy azokban a kutakban, ahonnan negatív irányban indulva nem érhetünk körbe, az egy kör megtételéhez szükségesnél kevesebb üzemanyag van. A rossz kutakban tehát összesen kevesebb üzemanyag van, mint amennyi két kör megtételéhez szükséges. Ezért a rossz kutak nem tartalmazhatják az összes üzemanyagot, van jó kút is.

Jankó András (Szeged, Ságvári E. Gyak. Gimn., 10. o.) dolgozata alapján

Megjegyzés. Ha a kutakban levő üzemanyag mennyisége nem elég két kör megtételére, akkor az állítás nem igaz. Helyezzük el a 3. ábra szerint az üzemanyagot két, egymáshoz közeli benzinkútnál, A -nál és B -nél úgy, hogy a két kútban külön-külön ne legyen elegendő üzemanyag a hosszabbik AB ív megtételéhez. Ebben az esetben A -ból csak pozitív, B -ből csak negatív irányban járhatjuk be a kört.



