I. megoldás. Ha a raktárban csupa egyforma tömegű csomag van, amelyek közös tömege x, akkor a teherautókra $\left[\frac{3}{x}\right]$, illetve $\left[\frac{4}{x}\right]$ darab fér el, az elszállítható tömeg ilyenkor

$$\left(\left[\frac{3}{x}\right]+\left[\frac{4}{x}\right]\right)x=7-\left(\left\{\frac{3}{x}\right\}+\left\{\frac{4}{x}\right\}\right)x.$$

A „hiányt", a

$$h(x)=\left(\left\{\frac{3}{x}\right\}+\left\{\frac{4}{x}\right\}\right)x$$

függvény grafikonját az ábrán láthatjuk.

Ez a hiányfüggvény a $(0;1]$ intervallumon értelmes, itt szakaszonként fogyó lineáris, azokban a pontokban szakad, ahol $\frac{3}{x}$ vagy $\frac{4}{x}$ értéke egész szám. A grafikont nyilván elegendő csak az $\frac{1}{2}$-nél nagyobb x-ekre vizsgálni, ennél kisebb súlyokkal ugyanis a két teherautó legfeljebb $\frac{1}{2}$-$\frac{1}{2}$ tonnányi hiánnyal feltölthető.

Az is látható, hogy a függvénynek nincsen maximuma, a legnagyobb olyan hiány, ami már nem érhető el egyenlő súlyokkal, a $\frac{7}{5}$.

Ha tehát $7-\frac{7}{5}=\frac{28}{5}$ tonnánál többet akarunk vállalni, akkor ez egyenlő súlyokkal megakadályozható. $\frac{28}{5}+d$ tonna terhet például már nem vállalhatunk, hiszen ha $d^*<\min\left(\frac{1}{5},\frac{d}{7}\right)$, akkor $\frac{4}{5}+d^*$ tonnás csomagokból a két teherautóra összesen $3+4=7$ darab fér, amelyek együttes tömege kisebb, mint $\frac{28}{5}+d$.

Megmutatjuk, hogy legalább $\frac{28}{5}$ tonna terhet mindig el tudunk szállítani – természetesen, ha van ennyi áru a raktárban. Osszuk ehhez a csomagokat két csoportra: legyenek a *nehezek* azok, amelyek tömege legalább $\frac{7}{10}$ tonna, a többiek pedig a *könnyűek*. Kezdjük el fölrakni a csomagokat az autókra, ha vannak nehezek, kezdjük ezekkel, majd ha ezek esetleg elfogytak vagy nincsenek, akkor a könnyűekkel folytatva – ha vannak ilyenek – egészen addig, amíg már egyik autóra sem tudunk több csomagot fölrakni.

Ez persze bekövetkezhetett azért, mert valamennyi csomagot fölraktuk már; ekkor nyilván teljesítettük, amit vállaltunk. Ha egy könnyű csomagnál akadtunk el, akkor mindkét teherautó kapacitását kevesebb, mint $\frac{7}{10}$ tonna hiánnyal használtuk ki, azaz a két teherautón összesen több, mint $3+4-2\cdot\frac{7}{10}=\frac{28}{5}$ tonna teher van; most is teljesítettük, amit vállaltunk.

Az az eset maradt, ha egy nehéz csomag fölrakásakor akadunk el. Ekkor a nehéz csomagok együttes tömege több 6 tonnánál, hiszen az elakadáskor az egyik autót túlterheltük, a másikból pedig kevesebb, mint 1 tonna hiányzik. Pakoljunk le a teherautókról és tekintsük csak a nehéz csomagokat. Megmutatjuk, hogy már belőlük is fölrakható legalább $\frac{28}{5}$ tonna.

Ha van két olyan csomag, amelyek együttes tömege legalább $\frac{8}{5}$ tonna, akkor ezeket tegyük a kisebbik teherautóra. Ekkor itt még legalább egy tonna szabad hely marad, hiszen semelyik két csomag nem nehezebb 2 tonnánál. Ez azt jelenti, hogy a nagyobbik autót elakadásig rakva, az első csomagot, ami ott már nem fér, még éppen elhelyezhetjük a kisebbik teherautón. Így pedig összesen több, mint $4+\frac{8}{5}=\frac{28}{5}$ tonna súlyt raktunk föl.

Ha bármely két csomag együttes tömege $\frac{8}{5}$ tonna alatt marad, akkor könnyen látható, hogy ha $k>2$, akkor bármely k darab csomag együttes tömege is kisebb, mint $k\cdot\frac{4}{5}$ tonna, tehát bármely öt csomag együttes tömege kisebb 4 tonnánál. Így bármely öt nehéz csomag elfér a nagyobbik autón, a kisebbiken pedig nyilván elfér három. A két autóra most összesen legalább nyolc darab nehéz csomag rakható, ezek együttes tömege pedig ismét legalább $8\cdot\frac{7}{10}=\frac{28}{5}$ tonna.

Ezzel igazoltuk, hogy minden esetben elszállítható legalább $\frac{28}{5}$ tonna, ennél több azonban nem feltétlenül.

Megjegyzések. 1. A bizonyításból az is kiderül, hogy valójában minden esetben több, mint $\frac{28}{5}$ tonna terhet tudunk fölrakni az autókra, ezt azonban nem lehet „szerződésben vállalni”.

2. A fenti bizonyítás lényegében hasolóan működik, ha a két teherautó kapacitása a, illetve $a+1$ tonna, ahol a egész szám. A maximális vállalható teher ebben az esetben $2a+1-\frac{2a+1}{a+2}$ tonna.

3. A megoldás során felhasználtuk, hogy ha egy adott számhalmaz elemei közül bármely m darab átlaga kisebb, mint t, akkor minden $k > m$ esetén bármely k darab átlaga is kisebb, mint t. (A fenti bizonyításban $m = 2$ és $t = \frac{4}{5}$, a számok átlaga helyett pedig a számok összegéről beszéltünk.)

Egy k elemű H halmaz elemeiből összesen $\binom{k}{m} = \frac{k}{m} \cdot \binom{k-1}{m-1}$ darab m elemű halmaz készíthető. Eközben a H minden egyes elemét ugyanannyiszor, $\binom{k-1}{m-1}$-szer használtuk fel. A H elemeiből készíthető m tagú összegek összege tehát a H elemei összegének a $\binom{k-1}{m-1}$-szerese, ami a feltétel szerint kisebb, mint $\binom{k}{m} \cdot mt$. A H elemeinek az összege eszerint kisebb, mint

$$\frac{\binom{k}{m} \cdot mt}{\binom{k-1}{m-1}} = kt,$$

és éppen ez a bizonyítandó állítás.

4. A megoldás során kiderült, hogy a maximum az egyenlő súlyokat feltételezve megkapható. Ez egyáltalán nem nyilvánvaló, az Interneten közölt megoldást követve erre adódik egy bizonyítás, ami azonban feltételezi, hogy a raktárkészlet elegendően nagy. Az alábbiakban *Tardos Gábor* nyomán bebizonyítjuk ezt az állítást.

II. megoldás. A következőt igazoljuk. Adottak az M, a, b pozitív számok úgy, hogy $1 \le a \le b$ és $M \le a + b - 1$. Teljesül továbbá, hogy minden olyan S számhalmazból[1]A szokásos megszorítással ellentétben itt most megengedjük, hogy egy számhalmazban azonos elemek is szerepeljenek. Valójában helyesebb volna számok listájáról beszélni. , amelyik egyenlő, 1-nél nem nagyobb elemekből áll és amelyben az elemek összege legalább[2] ld. a II. megoldáshoz fűzött 2. megjegyzést M, kiválasztható két csoport úgy, hogy az egyik csoportban az elemek összege legfeljebb a, a másikban pedig legfeljebb b.

Azt állítjuk, hogy ekkor ugyanez a kiválasztás még akkor is megtehető, ha a halmaz elemeiről nem tesszük föl, hogy egyenlők.

Itt a és b nyilván a teherautók kapacitása. Megjegyezzük, hogy a bizonyítás során nem használjuk fel, hogy ezek a számok egészek. Vegyük észre viszont, hogy ha azok, akkor az $M \le a + b - 1$ megszorítás szükséges, hiszen ha a raktárban $\frac{1}{2}$ tonnánál bármilyen kicsivel nehezebb csomagok vannak, akkor ezekből összesen $(2a - 1 + 2b - 1)$ rakható föl, azaz $a + b - 1$ tonnánál többet biztosan nem tudunk elszállítani.

A feladat állítása innen nyilvánvaló módon adódik. A $h(x)$ függvény mutatja, hogy bárhogyan helyezünk el a raktárban egyenlő tömegű csomagokat, ha ezek együttes tömege legalább $\frac{28}{5}$ tonna, akkor a két teherautón elfér legalább $\frac{28}{5}$ tonna, $7 - h(x) > \frac{28}{5}$.

Tekintsük tehát az S halmazt. Először is feltehető, hogy az S elemei közül bármelyiket elhagyva a megmaradó számok összege már M alá csökken, a többi számot ugyanis – ha vannak ilyenek – egyszerűen elhagyhatjuk, a keresett számhalmazok elkészítése, azaz a teherautók feltöltése nélkülük is megvalósítható.

Jelölje m a számok minimumát, ekkor tehát S elemeinek az összege kisebb, mint $M + m$. Legyen t az S elemeinek az átlaga, és tekintsünk egy olyan számhalmazt, amely csupa egyenlő, t értékű számból áll. A feltétel szerint ekkor megoldható a feladat, léteznek tehát az α és β pozitív egészek úgy, hogy $\alpha t \le a$, $\beta t \le b$ és $(\alpha + \beta)t \ge M$. Tekintsük most az eredeti S számhalmazban az $\alpha + \beta$ darab legnagyobb számot.

Ezek összege nyilván legalább M. Ha szétoszthatók egy-egy α, illetve β elemű csoportra úgy, hogy az első csoport összege legfeljebb a, a másodiké pedig legfeljebb b, akkor készen is vagyunk. Ha ez nem megy, akkor közülük például egy α elemű csoportban az elemek összege nagyobb, mint a.

Tekintsük most az S halmazban az α darab legkisebb számot! Ezek átlaga nyilván legfeljebb t, így összegük sem nagyobb, mint a. Ha most ennek a minimális csoportnak az elemeit egyesével kicseréljük az előbbi „nehéz" csoport elemeire – a két csoportban persze lehet átfedés –, akkor lesz egy olyan állapot és egy ennek megfelelő α elemű H_α csoport, amelyben az elemek összege még kisebb, mint a, de H_α egy elemét egy másikra cserélve az összeg a fölé nő. Mivel egy csere legfeljebb $(1 - m)$-mel növeli a halmaz elemeinek az összegét, azért H_α elemeinek az összege, ami még nem nagyobb, mint a, nagyobb, mint $a - (1 - m)$. Mivel S elemeinek az összege kisebb, mint $M + m$, azért a H_α komplementerében az elemek összege kisebb, mint

$$M + m - a + 1 - m = M - a + 1 \le b,$$

a H_α halmaz és a komplementere tehát egy-egy megfelelő részhalmazt szolgáltat. Ezzel a bizonyítást befejeztük.

Megjegyzések. 1. A most bizonyítottak szerint elegendő az elszállítható maximális terhet azzal a többletfeltevéssel keresni, hogy a raktárban a csomagok tömege egyenlő. Ez az ábrán látható $h(x)$ függvény *felső határának* vizsgálatát jelenti a $(0; 1]$ intervallumon. Ezzel adott a és b egészekre véges sok érték maximumának a megtalálásává egyszerűsödik

11
22

a feladat, nem látszik azonban egyszerűnek annak tisztázása, hogy miképpen függ ez az érték az a és b számoktól általában. Ha pedig a és b nem egészek – márpedig a feladatban ezt semmi nem indokolja –, akkor a fenti bizonyításban felhasznált $M \leq a + b - 1$ feltétel sem látszik szükségesnek. A probléma továbbá természetes módon terjeszthető ki kettőnél több teherautó esetére.

2. Érdekes változatát kapjuk a feladatnak, ha – mint ahogyan ezt az Arany Dániel verseny döntőjében két versenyző is megtette[3] A versenyfeladat szövege lehetővé tette ezt az értelmezést is. – a feltételt némileg módosítva egy raktárost is közbeiktatunk, akinek az a dolga, hogy az általunk vállalt M tömegű terhet ténylegesen összeállítsa. A feladatban így az eredeti változathoz képest a „legalább M" helyett *pontosan* M összegű halmazt kell két, legfeljebb a, illetve b összegű részhalmazra osztani. Az eredeti $a = 3$, $b = 4$ kapacitásokkal ilyenkor nagyobb érték, $M = \dfrac{33}{5}$ adódik, de most is igaz, hogy a maximális elszállítható terhet elegendő olyan számhalmazokon vizsgálni – legalábbis ha egészek a kapacitások –, amelyekben az elemek egyenlők. Ennek bizonyítását az olvasóra bízzuk.