Legyen $AC = b$, $CP = d$, $\frac{1}{2}AB = e$, ekkor $BC = b + e$, legyen továbbá $PAC\sphericalangle = \alpha$ és $CPA\sphericalangle = \beta$ (*1. ábra*). Be kell látnunk, hogy $\alpha = 2\beta$.

Mivel $0^\circ < \alpha$, $\beta < 180^\circ$ és a koszinuszfüggvény 0 és 180° között monoton csökkenő, így az eredetivel ekvivalens a $\cos\alpha = \cos 2\beta = 2\cos^2\beta - 1$ egyenlőség. Ezt fogjuk igazolni.

Írjuk fel a koszinusztételt az ABC háromszögben az α szögre, majd az ACP háromszögben az α, illetve β szögekre:

$$(b+e)^2 = b^2 + (2e^2) - 4be\cdot\cos\alpha(1)d^2 = b^2 + \left(\frac{3}{2}e\right)^2 - 3be\cdot\cos\alpha(2)b^2 = d^2 + \left(\frac{3}{2}e\right)^2 - 3de\cdot\cos\alpha(3)$$

Fejezzük ki (1)-ből $\cos\alpha$-t: $\cos\alpha = \frac{3e-2b}{4b}$; helyettesítsük be (2)-be:

$$d^2 = b^2 + \frac{9}{4}e^2 - 3e\frac{3e-2b}{4} = b^2 + \frac{3}{2}be,$$

ezt helyettesítsük (3)-ba, és fejezzük ki $\cos\beta$-t:

$$\cos\beta = \frac{b^2 + \frac{3}{2}be + \frac{9}{4}e^2 - b^2}{3de} = \frac{2b+3e}{4d}.$$

Lássuk be, hogy $\cos\alpha = 2cos^2\beta - 1$, azaz

$$\frac{3e-2b}{4b} = 2\left(\frac{2b+3e}{4d}\right)^2 - 1. Mindktoldalhoz 1-ethozzadva: \frac{3e+2b}{4b} = 2\frac{(2b+3e)^2}{8d^2} = \frac{(2b+3e)^2}{4(2b^2+3be)},$$

ami valóban azonosság.

Béky Bence (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., 11. o.t.)

Megjegyzések. 1. A beküldők többsége hasonló módon, általában bonyolultabb számolással oldotta meg a feladatot. Azonban ha valaki szinusztételt használt, akkor önmagában nem volt elég a $\sin\alpha = \sin 2\beta$ egyenlőséget belátni, hiszen a $(0;\pi)$ intervallumon a szinuszfüggvény nem kölcsönösen egyértelmű.

2. Lényegesen egyszerűbb a megoldás, ha abból kiindulva, hogy $BC = b + e$, rajzolunk C körül egy b sugarú kört. Ha ez a kör az AB-t D-ben, CB-t pedig E-ben metszi, akkor a *2. ábra* jelöléseivel $CA = CD = CE = b$, $BE = e$.

Írjuk fel a B pontnak a körre vonatkozó hatványát kétféleképpen:

$$BE(BE + 2CE) = BD\cdot BA,$$

azaz

$$e(e+2b) = BD\cdot 2e,$$

ahonnan $BD = b + \frac{e}{2}$.

Mivel $PB = \frac{e}{2}$, így $DP = DB - PB = b$, tehát a DPC háromszög egyenlő szárú, $DCP\sphericalangle = \beta$. E háromszög D csúcsánál $CDA\sphericalangle = \alpha$ külső szög, így valóban $\alpha = 2\beta$.