Az *ábra* jelölései alapján az ABC derékszögű háromszögben Pitagorasz tétele szerint $c^2 = a^2 + b^2$. Alkalmazzuk Pitagorasz tételét az AF_aC és a BF_BC derékszögű háromszögekre:

$$s_a^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + b^2 \qquad \text{és} \qquad s_b^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 + a^2.$$

Thalész tétele miatt $s_c = \frac{c}{2} = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{4}}$, így

$$\frac{s_a + s_b}{s_c} = \frac{\sqrt{\frac{a^2}{4} + b^2} + \sqrt{\frac{b^2}{4} + a^2}}{\sqrt{\frac{a^2+b^2}{4}}} = \sqrt{\frac{a^2+4b^2}{a^2+b^2}} + \sqrt{\frac{4a^2+b^2}{a^2+b^2}} \le 2 \cdot \sqrt{\frac{\frac{a^2+4b^2}{a^2+b^2} + \frac{4a^2+b^2}{a^2+b^2}}{2}},$$

alkalmazva a számtani és a négyzetes közép közötti összefüggést a pozitív $\sqrt{\frac{a^2+4b^2}{a^2+b^2}}$ és $\sqrt{\frac{4a^2+b^2}{a^2+b^2}}$ számokra. Oszthatunk $a^2 + b^2 > 0$-val, így

$$\frac{s_a + s_b}{s_c} \le 2 \cdot \sqrt{\frac{5}{2}} = \sqrt{10}.$$

Egyenlőség akkor áll fenn, ha $a^2 + 4b^2 = 4a^2 + b^2$, azaz esetünkben, ha a derékszögű háromszög egyenlő szárú, $a = b$. Tehát a kifejezés maximuma $\sqrt{10}$.

Varga Noémi (Budapest, Szent István Gimn., 10. o.t.)

Megjegyzés. Gyakori hibák:

1. Az alkalmazott tételeket többen a megoldás leírásakor még csak meg sem említették.
2. Néhányan nem a maximumot, csak a maximum helyét adták meg.
3. Akik a szélsőértékfeladatot differenciálszámítással akarták megoldani, sokszor csak azt állapították meg, hogy a kifejezés (első) deriváltja 0, ez azonban még nem biztosítja, hogy ezen a helyen szélsőérték van!