Jelölje a szóban forgó összegek közül az elsőt $D_1(n)$, a másodikat pedig $D_2(n)$.

$D_1(n)$ meghatározásánál minden, az n-nél nem nagyobb pozitív páros számot annyiszor kell figyelembe vennünk, ahány többszöröse van az 1, 2, $\ldots$, n számok között. Ezért $D_1(n)=\sum\limits_{2j\le n} s_n(2j)$, ahol $s_n(k)$ jelöli a k pozitív egész 1 és n közé eső többszöröseinek számát: $s_n(k)=\lfloor n/k\rfloor$. Hasonlóképpen $D_2(n)=\sum\limits_{2j-1\le n} s_n(2j-1)$. Világos, hogy $k<l$ esetén $s_n(k)\ge s_n(l)$, így a $D_1(n)$ összeg minden egyes $s_n(2j)$ tagját felülről becsülhetjük a $D_2(n)$ összeg megfelelő $s_n(2j-1)$ tagjával. Következésképpen $D_1(n)\le D_2(n)$. Hasonlóképpen, az első tag $s_n(1)=n$ kivételével, a $D_2(n)$ összeg minden egyes $s_n(2j-1)$ tagja ($j\ge 2$) megbecsülhető a $D_1(n)$ összeg megfelelő $s_n(2(j-1))$ tagjával, ezért $D_2(n)\le n+D_1(n)$. A két egyenlőtlenség összevetéséből a feladat állítása azonnal leolvasható.

Megjegyzések. 1. A feladatot Pósa Lajos bocsátotta a versenybizottság rendelkezésére.

2. A fenti bizonyítást finomíthatjuk olyan módon, hogy az egyes összegek első néhány tagjára alkalmazzuk az $s_n(k)=\lfloor n/k\rfloor$ képletet, és csak a fennmaradó tagokat becsüljük a másik összeg megfelelő tagjaival. Így a $D_1(n)\le D_2(n)$ egyenlőtlenség helyett például $n\ge 2$ esetén az erősebb $D_1(n)-\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor\le D_2(n)-n$ becslést alkalmazhatjuk, ahonnan $\lceil n/2\rceil\le D_2(n)-D_1(n)\le n$ következik. Általában tetszőleges k pozitív egész számra felírható $n\ge 2k+1$ esetén a

$$\sum_{j=1}^{k}\left\lfloor\frac{n}{2j-1}\right\rfloor-\sum_{j=1}^{k}\left\lfloor\frac{n}{2j}\right\rfloor\le D_2(n)-D_1(n)\le\sum_{j=1}^{k+1}\left\lfloor\frac{n}{2j-1}\right\rfloor-\sum_{j=1}^{k}\left\lfloor\frac{n}{2j}\right\rfloor$$

egyenlőtlenség, amelyből kiindulva az $\ln(k+1)<1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{k}<1+\ln k$ becslésre támaszkodva nem nehéz megmutatni, hogy a $(D_2(n)-D_1(n))/n$ sorozat határértéke $\ln 2$.

Terpai Tamás dolgozatában azt is megmutatta, hogy a $D_2(n)-D_1(n)$ különbség $n\cdot\ln 2$-től való eltérése $\sqrt{n}$ nagyságrendű. (Erre vonatkozóan lásd még az 1999. decemberi számunk A. 225. számú feladatát.)