I. megoldás. Legyen F a BC oldal felezőpontja, ekkor AF az ABC háromszög súlyvonala. Legyen $CAB\sphericalangle = \varepsilon + \varphi$, ahol $CAF\sphericalangle = \varepsilon$ és $FAB\sphericalangle = \varphi$. Mivel a CAF és az FAB háromszögek területe egyenlő, igaz a következő:

$$t = \frac{AF \cdot AC \cdot \sin\varepsilon}{2} = \frac{AB \cdot AF \cdot \sin\varphi}{2},$$

$AC = 1$, tehát $AB = \dfrac{\sin\varepsilon}{\sin\varphi}$.

Esetünkben a súlyvonal a CAB szöget $1:2$ arányban osztja, így két eset lehetséges:

a) $\varphi = 2\varepsilon$ vagy *b)* $\varepsilon = 2\varphi$.

Az *a)* esetben $AB = \dfrac{\sin\varepsilon}{\sin 2\varepsilon} = \dfrac{\sin\varepsilon}{2\cos\varepsilon \cdot \sin\varepsilon} = \dfrac{1}{2\cos\varepsilon}$, és mivel $0^\circ < \varepsilon + \varphi < 180^\circ$, így $0^\circ < \varepsilon < 60^\circ$, tehát $\dfrac{1}{2} < AB < 1$.

A *b)* esetben $AB = \dfrac{\sin 2\varphi}{\sin\varphi} = \dfrac{2\cos\varphi \cdot \sin\varphi}{\sin\varphi} = 2\cos\varphi$, és mivel most $0^\circ < \varphi < 60^\circ$, így $1 < AB < 2$.

Az AB oldal hossza tehát $\dfrac{1}{2}$ és 2 között lehet, de nem veheti fel az 1 értéket.

Raikovich Tamás (Győr, Czuczor G. Bencés Gimn., 10. o.t.)

II. megoldás. *Megjegyzés.* Ez a megoldás nem használ szögfüggvényeket, csak a háromszög-egyenlőtlenséget, ezért érdemes megismerni.

Tekintsük az ABC háromszög két csúcsát, A-t és C-t, valamint az A-nál levő $\alpha = 3\delta$ szögét adottnak. Nevezzük e-nek az AB egyenesét: a háromszög B csúcspontja valahol ezen az egyenesen van. Mivel $\alpha < 180^\circ$, így $\delta < 60^\circ$. A *2. ábra* jelölései szerint a háromszögnek vagy s_1, vagy s_2 a súlyvonala. Tükrözzük C-t s_1-re és s_2-re, legyenek a tükörképek C_1, illetve C_2. Ekkor $AC = AC_1 = AC_2 = 1$, és C_1 nyilván rajta van s_2-n. Húzzunk C_1-en keresztül párhuzamost s_1-gyel és C_2-n keresztül párhuzamost s_2-vel; ezek metszéspontjai e-vel B_1, illetve B_2. Azt állítjuk, hogy ha az ABC háromszög súlyvonala s_1, akkor $B \equiv B_1$, ha pedig s_2, akkor $B \equiv B_2$. Valóban, s_1 felezi a CB_1, s_2 pedig a CB_2 szakaszt. B_1 vagy B_2 mindig egyértelműen adódik mint e és az s_1-gyel, illetve s_2-vel párhuzamos egyenesek egyetlen metszéspontja: s_1, s_2 és e ugyanis nem párhuzamosak.

Mivel $B_1C_1 \parallel s_1$, így a $B_1C_1A\sphericalangle = \delta$, tehát az AB_1C_1 háromszög egyenlő szárú; hasonlóan, az s_2-re vonatkozó szimmetria miatt $C_2AB_2\sphericalangle = \delta$, és $B_2C_2 \parallel s_2$ miatt $C_2B_2A\sphericalangle = \delta$, így az AC_2B_2 háromszög is egyenlő szárú.

Az AB_1C_1 háromszögben $AB_1 + B_1C_1 = 2AB_1 > AC_1 = 1$ a háromszög-egyenlőtlenség miatt, tehát $AB_1 > \dfrac{1}{2}$.

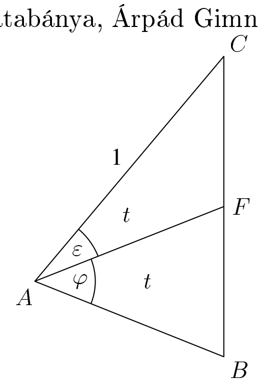
Mivel $AB_1C_1\sphericalangle = 180^\circ - 2\delta > 60^\circ$ ($\delta < 60^\circ$) és a nagyobb szög nagyobb oldallal szemben van, így $AB_1 < AC_1 = 1$.

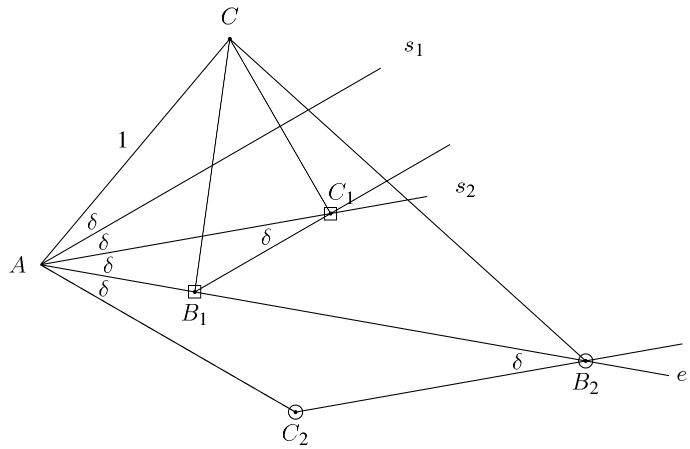
Azt kaptuk, hogy $\dfrac{1}{2} < AB_1 < 1$.

Az AC_2B_2 háromszögben $AC_2 + C_2B_2 = 2 > AB_2$ a háromszög-egyenlőtlenség miatt, és $AC_2B_2\sphericalangle = 180^\circ - 2\delta > 60^\circ$, így mivel nagyobb oldallal szemben kell hogy legyen a nagyobb szög, $AB_2 > AC = 1$, tehát $1 < AB_2 < 2$.

Tehát az AB oldal hossza az egyik esetben $\dfrac{1}{2}$ és 1, a második esetben 1 és 2 közé esik, és itt bármilyen értéket felvehet, hiszen minden ilyen értékhez megszerkeszthető vagy az AB_1C_1, vagy az AC_2B_2 háromszög. (Vigyázat, $AB \neq 1$!)

Takács Gergő (Tatabánya, Árpád Gimn. és Pedagógiai Szki., 10. o.t.) dolgozata alapján





C
s_1
1
C_1
s_2
δ
δ
δ
δ
δ
A
B_1
δ
B_2
e
C_2