A húrtrapéz olyan trapéz, amelynek oldalai a körnek húrjai, s mivel a húrnégyszög szemközti szögeinek összege 180°, ebből következik, hogy a trapéz egyenlő szárú.

Legyen a trapéz nagyobbik alapja $AB = a$, a kisebbik $DC = c$, szárai pedig $AD = BC = b$ (*1. ábra*).

A feltétel szerint:

$$d = 2b + c. \tag{1}$$

A trapéz területe: $T = \frac{a+c}{2} \cdot m$. Pitagorasz tétele szerint:

$$m = \sqrt{b^2 - \left(\frac{a-c}{2}\right)^2}.$$

(1)-ből $b = \frac{d-c}{2}$; ezeket behelyettesítve

$$T = \frac{a+c}{2}\sqrt{\left(\frac{d-c}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-c}{2}\right)^2}.$$

Alakítsuk át a kifejezést, használjuk fel az ismert $x^2 - y^2 = (x+y)(x-y)$ azonosságot:

$$T = \frac{a+c}{4}\sqrt{(d+a-2c)(d-a)}.$$

A $(d-a)$ értéke állandó, ez nem befolyásolja a maximum értéket; $d + a = k$ a trapéz kerülete. Tovább alakítva a kifejezést kapjuk, hogy

$$T = \frac{1}{4}\sqrt{d-a}\sqrt{(a+c)(a+c)(k-2c)}.$$

A második gyökjel alatt mindegyik tényező pozitív, a háromtényezős szorzatra felírhatjuk a számtani és mértani közepek közti egyenlőtlenséget:

$$\sqrt[3]{(a+c)(a+c)(k-2c)} \le$$
$$\le \frac{(a+c)+(a+c)+(k+2c)}{3} = \frac{k+2a}{3}.$$

A szorzat akkor maximális, ha a tényezők egyenlők, azaz $a + c = k - 2c = d + a - 2c$, ahonnan $3c = d$, illetve $c = \frac{d}{3}$ és $b = \frac{d-c}{2} = \frac{d}{3}$, vagyis a szárak és a rövidebbik alap hossza egyenlő.

Ilyen trapéz akkor létezik, ha $d > a$ (*2. ábra*).

A kétíves szögek egyenlők, mert egyenlő hosszúságú húrokhoz tartoznak, így $AB \parallel CD$, vagyis a négyszög valóban trapéz.

Ásványi Katalin (Ajka, Bródy I. Gimn., 11. o.t.)

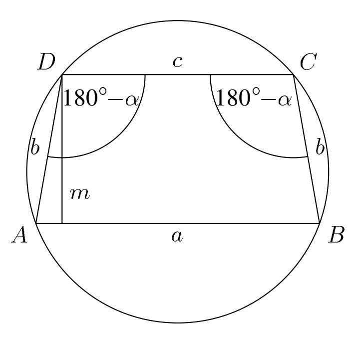
Megjegyzések. 1. A feladatot, mint szélsőérték-feladatot, deriválással is meg lehet oldani (lásd az internetes megoldásvázlatot).

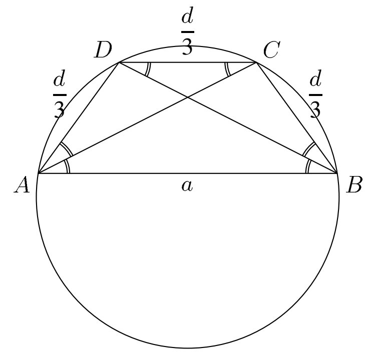
2. A szokásosnál több 0 pontos dolgozat oka az alábbi: Többen a következő hibás következtetéseket írták le:

a) „Mivel a négyszög kerülete adott, és adott kerületű négyszögek közül a négyzetnek a területe a legnagyobb, ezért a négyszög négyzet.” Ez a gondolat hibás, ugyanis nem csak a négyszög kerülete adott, hanem egyik oldala is, ezért (a $d = 3a$ esetet kivéve) a trapéz semmiképpen nem lehet négyzet.

b) „A húrtrapézt a hosszabbik párhuzamos oldalára tükrözve hatszöget kapunk. Adott kerület esetén a szabályos hatszög területe a legnagyobb, ezért a húrtrapéz 3 oldala egyenlő, és $\frac{d}{3}$-mal egyenlő.” Ez a hiba hasonló az előzőhöz: a kapott húrtrapéznak a kerületén kívül egyik átlója is előre megszabott, így erre az általános szélsőérték-feladatra sem hivatkozhatunk.

c) Voltak, akik a területet két egymástól nem független tag összegére bontották, és külön-külön keresték a maximumot, s ebből próbálták meghatározni a közös maximumot.





D
C
A
B
a
d/3
d/3
d/3