I. megoldás. *a*) A test egy l sugarú köríven leng (*1. ábra*), lengésideje

$$T=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}},\quad \text{ahol}\quad l=\frac{\sqrt{L^2-D^2}}{2}.$$

b) A test egy $2a=L$ nagytengelyű, $2b=2l$ kistengelyű ellipszispályán mozog. Kis kitérések esetén mozgása olyan, mint egy R hosszúságú inga lengése, ha $R=a^2/b$ az ellipszishez a legalsó pontjához tartozó simulókör sugara (*2. ábra*).

Ennek megfelelően a lengésidő:

$$T=2\pi\sqrt{\frac{R}{g}},\quad \text{ahol}\quad R=\frac{(L/2)^2}{l}=\frac{(L/2)^2}{\sqrt{(L/2)^2-(D/2)^2}}.$$

Lábó Melinda (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., 12.o.t.) dolgozata alapján

II. megoldás Vizsgáljuk meg, mennyit nő az m tömegű gyöngyszem gravitációs helyzeti energiája, ha a gyöngyöt az egyensúlyi helyzetéből kicsiny x távolságra kimozdítjuk. Amennyiben ez a növekedés (közelítőleg)

$$E(x)\approx\frac{1}{2}Dx^2$$

alakba írható, akkor – egy rugó végén harmonikus rezgőmozgást végző testtel való formai analógia miatt – állíthatjuk, hogy a gyöngyszem mozgásának periódusideje

$$T=2\pi\sqrt{\frac{m}{D}}$$

lesz.

a) A fonál síkjára merőleges irányban kitérítve a gyöngyöt, az egy $l=\frac{1}{2}\sqrt{L^2-D^2}$ sugarú körív mentén mozog, függőleges irányban az emelkedése

$$l-\sqrt{l^2-x^2}\approx l-l\left(1-\frac{x^2}{2l^2}\right)=\frac{x^2}{2l},$$

a helyzeti energia változása tehát $\frac{1}{2}mgx^2/l$. Ezek szerint a „rugóállandó” $D=mg/l$, a periódusidő pedig

$$T=2\pi\sqrt{\frac{\sqrt{L^2-D^2}}{2g}}.$$

Kihasználtuk, hogy egy 1-hez közeli szám négyzetgyöke

$$\sqrt{1+\varepsilon}\approx\sqrt{1+\varepsilon+\frac{\varepsilon^2}{4}}=1+\frac{\varepsilon}{2}. \tag{1}$$

b) A fonál síkjában kitérítve a gyöngyöt az egy ellipszispályán mozog, melynek egyenlete (lásd a *3. ábrát*):

$$\frac{x^2}{(L/2)^2}+\frac{y^2}{(L/2)^2-(D/2)^2}=1,$$

azaz ismét az (1) közelítést alkalmazva:

$$y(x)=-\frac{1}{2}\sqrt{(L^2-D^2)\left(1-\frac{4x^2}{L^2}\right)}\approx-\frac{1}{2}\sqrt{L^2-D^2}\left(1-\frac{2x^2}{L^2}\right).$$

Látható, hogy a gyöngyszem energiaváltozása

$$E=mg\left[y(x)-y(0)\right]\approx mg\frac{\sqrt{(L^2-D^2)}}{L^2}\cdot x^2,$$

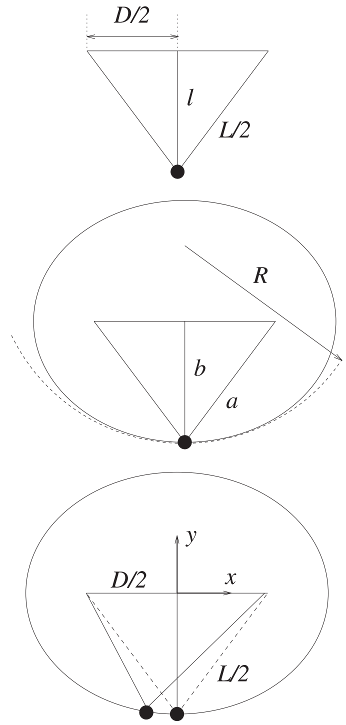
a rugóállandó tehát

$$D=2mg\frac{\sqrt{(L^2-D^2)}}{L^2},$$

a rezgésidő pedig

$$T=2\pi\sqrt{\frac{L^2}{2g\sqrt{L^2-D^2}}}.$$

Hegedűs Ákos (Pécs, Ciszterci Nagy Lajos Gimn., 12 .o.t.)


D/2
l
L/2
R
b
a
y
D/2
x
L/2