Az állítás nyilván nem igaz az üres gráfra; ezért továbbiakban feltételezzük, hogy a gráfnak van legalább egy csúcsa. Mivel ennek a csúcsnak legalább 3 szomszédja van, a csúcsok száma legalább 4.

Először bebizonyítjuk, hogy ha egy nem üres gráfban minden csúcs foka legalább 2, akkor a gráf tartalmaz kört. Képezzük csúcsok egy A_0, A_1, $\ldots$ sorozatát a következőképpen. Legyen A_0 és A_1 két szomszédos csúcs. Ha valamely $n \ge 1$-re A_n-et már definiáltuk, akkor legyen A_{n+1} az A_n-nek az egyik, A_{n-1}-től különböző szomszédja. Ilyen mindig létezik, mert A_n-nek a feltétel szerint legalább két szomszédja van. Mivel a gráfnak csak véges sok csúcsa van, bizonyos csúcsok a sorozatban többször szerepelnek. Legyen A_m az első olyan eleme a sorozatnak, ami korábban már szerepelt: $A_m = A_k$ valamely $k < m$-re. Ekkor nyilván $m > k + 2$ (a gráf egyszerű), és így az A_k, A_{k+1}, $\ldots$, A_{m-1} csúcsok egy kört alkotnak.

Válasszuk ki most a gráf egy tetszőleges C csúcsát. A gráf tartalmaz olyan kört, amely nem megy át C-n. Ha ugyanis a C csúcsot a belőle induló élekkel együtt elhagyjuk, a megmaradó gráf legalább 3 csúcsot tartalmaz, és mindegyik csúcs foka legalább 2; az előbbiek szerint ez a gráf tartalmaz kört.

Ha egy C-n át nem menő kör éleit elhagyjuk, a gráf esetleg több komponensre esik szét. Legyen K az egyik C-n át nem menő kör, amelyre a C-t tartalmazó komponens maximális számú csúcsot tartalmaz. Megmutatjuk, hogy K éleit elhagyva a gráf összefüggő marad.

Tegyük fel, hogy K éleit elhagyva a gráf legalább két komponensre esik szét. Az eredeti gráfbeli utakkal bármelyik két komponens pontjai összeköthetők. A K éleinek elhagyása után ezekből az utakból csupán K élei hiányozhatnak; ebből látható, hogy minden komponensnek van közös csúcsa a K körrel.

Legyen G_1 az a komponens, amely C-t tartalmazza, G_2 pedig egy ettől különböző komponens. Mindkét komponensnek van legalább egy közös csúcsa a K körrel; legyen egy-egy ilyen csúcs D, illetve E. Két esetet fogunk vizsgálni aszerint, hogy G_2-nek és K-nak van-e E-kívül más közös csúcsa.

Vizsgáljuk először azt az esetet, amikor G_2-nek és K-nak az E az egyetlen közös csúcsa (*1. ábra*). Mivel E-nek legalább három szomszédja van, és ezek közül csak kettő tartozik a K körhöz, legalább egy szomszédja G_2-ben van; a G_2 komponens tehát legalább még egy csúcsot tartalmaz. Tekintsük most azt a gráfot, amelyet úgy kapunk, hogy G_2-ből elhagyjuk E-t és a belőle induló éleket. Ez a gráf nem üres, és minden csúcsa legalább másodfokú. A gráf tehát tartalmaz egy K' kört. Ha eredetileg a K kör helyett ennek a K' körnek az éleit hagytuk volna el, akkor a C-t tartalmazó komponensnek része lenne a G_1 gráf és az E csúcs is; ez ellentmond annak, hogy a G_1 komponens éleinek száma maximális.

Most vizsgáljuk azt az esetet, amikor G_2-nek és K-nak E-n kívül még legalább egy közös csúcsa van; legyen egy ilyen csúcs F. Feltételezzük, hogy a K körnek a D-t nem tartalmazó EF ívén a G_2 komponensnek nincs több csúcsa; ezt mindig elérhetjük úgy, hogy az E és F csúcsot a K és G_2 más, megfelelő közös csúcsaira cseréljük (*2. ábra*).

Mivel a G_2 komponens összefüggő, az E és F pontok összeköthetők G_2-beli élekkel. Ez az út a K körnek a D-t nem tartalmazó EF szakaszával együtt egy K' kört alkot. Ha a K helyett a K' kör éleit hagytuk volna el, akkor a C-t tartalmazó komponens ismét tartalmazná G_1 valamennyi pontját, és K megmaradó élei révén tartalmazná a DE és a DF íveknek legalább egy-egy további pontját is. Ez ismét ellentmond annak, hogy G_1 maximális.

Tehát a K kör éleinek elhagyása után a gráf valóban összefüggő marad.

Csóka Endre (Debrecen, Fazekas M. Gimn., 9. o.t.)