**I. megoldás.** Képzeljük el, hogy a felvételi rendszer reformja miatt azoknak a felvételizőknek, akik egynél több egyetemre jelentkeznek, egyetempárokat kellene megjelölniük az erre a célra rendszeresített „dupla jelentkezési íveken". Aki persze nem akar továbbtanulni vagy pontosan tudja, mit akar, annak ilyesmivel nem kell vesződnie, de ha valaki például 4 egyetemre is jelentkezik, annak $\binom{4}{2}=6$ dupla ívet kell kitöltenie.

Egy diáknak így 0, 0, 1, 3, 6, illetve 10 dupla ívre van szüksége aszerint, hogy 0, 1, 2, 3, 4 vagy pedig 5 egyetemre jelentkezik. Mindenképpen igaz tehát, hogy aki $e$ helyre jelentkezik, az legalább $2e-3$ dupla ívet tölt ki.

Ha az osztályba $n$ diák jár, akik rendre $e_1$, $e_2$, …, $e_n$ egyetemre jelentkeznek, akkor a fentiek szerint összesen legalább $\sum_{i=1}^{n} 2e_i-3=2\sum_{i=1}^{n} e_i-3n$ dupla ívet írnak meg.

Vizsgáljuk most a $\sum_{i=1}^{n} e_i$ összeget. Ez az összes jelentkezések száma, amit ha egyetemenként számolunk össze, akkor legalább $5\frac{n}{2}$-t kapunk, hiszen a feltétel szerint minden egyetemre legalább az osztály fele jelentkezett. A szükséges dupla ívek száma így legalább $2\sum_{i=1}^{n} e_i-3n\geq 2\cdot 5\frac{n}{2}-3n=2n$. Az összesen 10 egyetempárra így legalább $2n$ dupla ív érkezik, van tehát olyan egyetempár, ahová ennek legalább az egytizede, $\frac{n}{5}$, és ezt kellett bizonyítani.

*Csóka Endre* (Debrecen, Fazekas M. Gimn., 9. o.t.)

**II. megoldás.** Legyen az osztály létszáma $n$, és jelölje $s_i$ azoknak a számát, akik pontosan $i$ darab egyetemre jelentkeztek. Ha most $T$ a továbbtanulni szándékozók, $J$ pedig az egyetemi jelentkezések száma, akkor nyilván $T=s_1+s_2+s_3+s_4+s_5\leq n$, másfelől $J=s_1+2s_2+3s_3+4s_4+5s_5$, ami a feltétel szerint legalább $5\frac{n}{2}$. Az egyszerűség kedvéért jelölje $k$ a $k$-adik egyetemet ($k=1, 2, 3, 4, 5$), az egyetemek egy tetszőleges $H$ részhalmazára pedig $e_H$ azon diákok számát, akik pontosan a $H$-beli egyetemekre jelentkeztek. Így azoknak a diákoknak a száma, akik jelentkeztek $H$-beli egyetemekre: $\sum_{H\subseteq G} e_G=E_H$. (A szóban forgó halmazok valamennyien az $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ halmaz részhalmazai.) Ekkor

$$E_{12}=e_{12}+(e_{123}+e_{124}+e_{125})+(e_{1234}+e_{1235}+e_{1245})+e_{12345},$$

ennyien jelentkeztek tehát az 1 és a 2 egyetemre. Még kilenc hasonló összeget írhatunk fel,

$$E_{13}=e_{13}+(e_{132}+e_{134}+e_{135})+(e_{1324}+e_{1325}+e_{1345})+e_{13245},$$

$$\vdots$$

$$E_{45}=e_{45}+(e_{451}+e_{452}+e_{453})+(e_{4512}+e_{4513}+e_{4523})+e_{45123}.$$

Azt kell bizonyítanunk, hogy e tíz összeg között van olyan, amelyiknek az értéke legalább $\frac{n}{5}$, ez pedig következne abból, ha e tíz összeg $E$ összege – amelyik szimmetrikus lévén könnyebben kezelhető – legalább ennek 10-szerese, azaz legalább $2n$. Vizsgáljuk tehát az $E$ összeget.

Egy adott $e_G$ tagot a $G$ minden kételemű $\{i,\ j\}$ részhalmazához felírt $E_{ij}$ összeg tartalmaz, mégpedig pontosan egyszer. Eszerint az $E$ összegben pontosan $\binom{|G|}{2}$ alkalommal fordul elő az $e_G$ tag. Így

$$E=\sum_{|G|=2}^{5}\binom{|G|}{2}\cdot e_G=\sum_{|G|=2} e_G+3\sum_{|G|=3} e_G+6\sum_{|G|=4} e_G+10\sum_{|G|=5} e_G.$$

Másfelől a $\sum_{|G|=i} e_G$ összeg éppen azoknak a diákoknak a száma, akik pontosan $i$ darab egyetemre jelentkeztek, korábbi jelölésünkkel $s_i$. Így az

$$E=s_2+3s_3+6s_4+10s_5$$

egyenlőséget kapjuk, erről az összegről kell megmutatnunk, hogy legalább $2n$. Rendelkezésünkre állnak a

$$T\leq n(1) saJ\geq \frac{5}{2}n(2)$$

feltételek, ebből kell bebizonyítanunk, hogy $E\geq 2n$. Tekintsük az (1) szerint nyilván teljesülő $\frac{3}{2}n+\frac{1}{2}E\geq\frac{3}{2}T+\frac{1}{2}E$ egyenlőtlenséget. Ennek jobb oldala $1,5s_1+2s_2+3s_3+4,5s_4+6,5s_5$, ami nyilván nagyobb vagy egyenlő, mint $J=s_1+2s_2+3s_3+4s_4+5s_5$. Így (2) miatt $\frac{3}{2}n+\frac{1}{2}E\geq J\geq\frac{5}{2}n$, ahonnan rendezés után valóban $E\geq 2n$ adódik. Ezzel a bizonyítást befejeztük.

*Dénes Attila* (Békéscsaba, Rózsa F. Gimn., 12. o.t.)

*Megjegyzések.* 1. Mindkét megoldásból kiderül, hogy a feladat állítása éles. Egyenlőség pontosan akkor lehetséges, ha valamennyi becslésben egyenlőség van, senki nem jelentkezik 0, 1, 4 vagy 5 egyetemre, és az osztály tanulóinak pontosan a fele jelentkezik minden egyes egyetemre.

2. Az $s_i$ változók segítségével megfogalmazott feladat: *keressük az* $s_2 + 3s_3 + 6s_4 + 10s_5$ *összeg minimumát az* $s_1 + s_2 + s_3 + s_4 + s_5 \le n$ *és az* $s_1 + 2s_2 + 3s_3 + 4s_4 + 5s_5 \ge \frac{5}{2}n$ *feltételek mellett* mutatja, hogy a feladatnak ez a része az ún. *lineáris programozás* témakörébe tartozik.

3. Érdemes egybevetni a két megoldást. A másodikban a szerző szemmel láthatólan nem használta ki, hogy a feladat egy osztály tanulóiról szól, az $n$-nel való osztás után a megoldás szó szerint alkalmazható bármely halmazra és annak részhalmazaira, amennyiben a részhalmazokhoz mérőszámot – például területet – rendelünk. Ez a mérőszám a feladatban a halmazok elemszáma, az első megoldás kombinatorikai megközelítésében alapvető volt, hogy a szóban forgó halmazok végesek. A feladat állítása a második megoldás szerint nem csak ekkor igaz, tehát például a következő állítást is igazolta a szerző:

*Egy egységnyi területű zsákon öt folt található, amelyek bármelyikének a területe legalább* $\frac{1}{2}$*. Mutassuk meg, hogy van a foltok között kettő, amelyek közös részének területe legalább* $\frac{1}{5}$.

Ennek a feladatnak a megoldásáról és lehetséges általánosításairól szól *I. M. Jaglomnak* a *Kvant* című folyóiratban megjelent klasszikus cikke, amelynek fordítását számunk 10–20. oldalán közöljük.