Elegendő a sorrendeknél csak arra tekintettel lenni, hol állnak lányok, hol fiúk, hiszen ha már ki vannak jelölve a „lányhelyek” és a „fiúhelyek”, akkor mindig ugyanannyiféleképpen tudjuk elrendezni a lányokat a lányhelyeken, és a lányok elhelyezésétől függetlenül ugyanannyiféleképpen a fiúkat a fiúhelyeken. A megoldásokban ezért csak a fiú–lány sorrendek számával foglalkozunk.

Nevezzük azokat a sorrendeket, amelyek nem vághatók a feladatokban leírt módon ketté, A-típusúnak, azokat, amelyeknek egy ilyen kettévágásuk van, B-típusúnak.

I. megoldás. Jelöljük az első helyen álló tanulót és a vele egyező neműeket X-szel, a másik nemű tanulókat Y-nal. Ha n lány és n fiú van az osztályban, akkor eszerint n darab X-nek és n darab Y-nak az X-szel kezdődő sorrendjeit kell vizsgálnunk. Minden ilyen sorrendhez a fiúknak és lányoknak két sorrendje tartozik, az egyik, amelyikben X-et fiúnak és Y-t lánynak értelmezzük, és a másik a fordított értelmezéssel keletkező.

Egy X-szel kezdődő A-típusú elrendezésben bármely betűig – az utolsó kivételével – legalább eggyel több X fordul elő, mint Y, hiszen a két betű előfordulásszáma közti különbség betűről betűre haladva eggyel változik, tehát ha X-szel kezdődik a sor, akkor az Y-ok csak úgy kerülhetnének túlsúlyba, ha előzőleg egyenlővé vált volna az X-ek és Y-ok száma. Ez azonban A-típusú elrendezésben csak az utolsó betűnél következhet be.

Egy B-típusú elrendezés a kettévágásnál két A-típusúra bomlik szét. Ezek közül az első X-szel kezdődik, a második azonban kezdődhet X-szel is, Y-nal is. Azok, amelyekben a második rész is X-szel kezdődik, a B-típusú elrendezések felét teszik ki, mert ezek második részében felcserélve az X-eket és Y-okat, minden sorrendet megkapunk és mindegyiket csak egyszer. A feladat állítását tehát bebizonyítjuk, ha az X-szel kezdődő A-típusú elrendezéseket egyértelműen összepárosítjuk az olyan B-típusúakkal, amelyeknek mindkét A-típusú része X-szel kezdődik.

Egy kívánt hozzárendelés történhet úgy, hogy a B-típusú elrendezés második A-típusú részének élén álló X-et a sor legelejére állítjuk.

Ezáltal A-típusú elrendezést kapunk, ugyanis a B-típusú elrendezés első A-típusú részében, mint láttuk, egy tetsző-leges betűig, az utolsó kivételével, legalább eggyel több X van, mint Y. Az egész elé téve egy X-et, a második betűtől kezdve tehát legalább 2-vel több X lesz mint Y, egészen amíg az első A-típusú rész utolsó betűjéig nem érünk. Ez a betű a második A-típusú rész első betűje helyére került. Idáig eggyel több az X-ek száma, mint az Y-oké. A további betűket ugyanazok a betűk előzik meg, amelyek a B-típusú elrendezésben megelőzték, így megint több X lesz, mint Y, egészen az utolsó betűig.

A meggondolásból azt is látjuk, hogy fordítva egy A-típusú sorrendben a második olyan betűt kell megkeresni, ameddig eggyel több X szerepel,[1] mint Y, és ez után helyezni a sor elejéről az első X-et. Ezáltal X-szel kezdődő sorrendet kapunk, mert ha az A-típusú elrendezésben az első X-et egy Y követné, akkor mindjárt az után ketté lehetne vágni a sorrendet, hiszen legalább négy betűből áll a sor. Az első X elvételével az X-ek és Y-ok számának a különbsége 1-gyel csökken, amíg el nem érjük az áthelyezett betű új helyét. Mivel az előtt 1 volt ez a különbség, most 0-ra csökken, mégpedig itt először. Itt tehát kettévágható a sorrend, előbb azonban nem. Tovább megint az X-ek lesznek túlsúlyban, mig a sor végére nem érünk, hiszen az X új helyén túl minden betűig ugyanazok a betűk vannak a módosított sorrendben is, mint az eredetiben.

Ezzel a kívánt párosítást elvégeztük, s így a feladat állítását igazoltuk.

Megjegyzések. 1. Jelöljük a k fiú és k lány A-, ill. B-típusú sorrendjeinek számát a_k-val ($k \geq 1$), ill. b_k-val ($k \geq 2$). Egy B-típusú elrendezést csak páros számú betű után lehet kettévágni. Az olyan elrendezések száma, amelyben ez a $2k$-adik betű után történik ($k = 1, 2, \ldots, n-1$)$(a_k/2) \cdot a_{n-k}$, mert egy $2k$ betűből álló, X-szel kezdődő A-típusú elrendezést követ egy tetszés szerinti, $2n-2k$ betűből álló. Így

$$\frac{b_n}{2} = \frac{a_1}{2} \cdot a_{n-1} + \frac{a_2}{2} \cdot a_{n-2} + \ldots + \frac{a_{n-1}}{2} \cdot a_1.$$

A feladatot tehát megoldjuk, ha megmutatjuk, hogy a_n is felírható a jobb oldal formájában, vagy 2-vel osztva és $a_k/2$-t a'_k-vel jelölve

(1) $$a'_n = a'_1 \cdot a'_{n-1} + a'_2 \cdot a'_{n-2} + \ldots + a'_{n-1} \cdot a'_1.$$

2. Tuza Zsolt, dolgozatában a következő probléma közvetítésével látja be (1) fennállását:

„Hányféleképpen lehet egy kör (v. bármely konvex zárt vonal) mentén elhelyezett $2k$ pontot úgy összepárosítani, hogy a párokat összekötő húroknak ne legyen közös pontja?”

Megmutatja egyfelől, hogy a megfelelő összekötések száma a'_{k+1}. Az összekötő húrok kisebb indexű végpontjához X-et, a nagyobb indexűhöz Y-t ír, majd sorra leírja az egymás utáni pontok mellé írt betűket és az elejére ír még egy X-et, a végére egy Y-t. Másfelől az első pontból induló átló két zárt vonalat képez a körből. Az egyikre és a másikra eső pontok külön–külön egymást nem metsző húrokkal vannak összekötve. (Megegyezünk abban, hogy 0 pont összekötéseinek számán $a'_1 = 1$-et értünk.) Ez a gondolat elvezet az (1) összefüggés igazolásához. A részletek végiggondolását az olvasóra bízzuk.

3. A fenti megszámlálási gondolat megfogalmazható az A-típusú elrendezések kettébontásaként az összekötési probléma közbeiktatása nélkül, ugyanis az első pontból induló húr végpontjának az a betű felel meg, amelynél másodszor

[1] Először mindjárt az első X után lesz ez a különbség 1.

csökken az addig előforduló X-ek és Y-ok számának különbsége 1-re. Így az A-típusú elrendezéseknek a fenti megoldásban szereplő átalakításához jutunk, csak ezt most nem a B-típusú elrendezésekhez való hozzárendelésre használjuk, hanem összeszámláljuk segítségével az A-típusú elrendezéseket is ugyanúgy, mint föntebb a B-típusúakat. A részletek végiggondolását ismét az olvasóra bízzuk.

Ez a meggondolás azt mutatja, hogy az összekötési probléma szellemes közbeiktatása nélkülözhető, és tulajdonképpen a fenti megoldás egy variánsával állunk szemben.

4. Az (1) formula és az $a'_1 = 1$ kezdő érték módot ad az a'_n, s így egyben az a_n, értékek egymás utáni kiszámítására, az a'_n, értékek úgynevezett rekurzív meghatározására. Többen egy másik rekurzív meghatározást találtak:

Az összes, n darab X-ből és n darab Y-ból álló sorozatok száma $\binom{2n}{n}$. Ezek közül a nem A-típusúak valamilyen k-ra a $2k$-adik betű után először (esetleg azután még más helyen is) kettévághatók úgy, hogy odáig k darab X és k darab Y legyen $(1 \le k \le n-1)$. A vágás előtti rész A-típusú, az ilyenek száma a_k, tovább a $2n-2k$ elem $\binom{2n-2k}{n-k}$ lehetséges elrendezésének bármelyike állhat. Ebből az

$$a_n = \binom{2n}{n} - a_1\binom{2n-2}{n-1} - a_2\binom{2n-4}{n-2} - \ldots - a_{n-1}\binom{2}{1} \tag{2}$$

összefüggés adódik, ami az $a_1 = 2$ kezdő értékkel szintén meghatározza az a_n értékeket. Kézenfekvő gondolat volna ezután (1)-et teljes indukcióval megpróbálni bizonyítani (2) felhasználásával, ez azonban nem vezet eredményre. Többen megtalálták vagy megsejtették a_n, meghatározását binomiális együtthatók segítségével. Még ennek ismeretében sem könnyű bizonyítani az (1) azonosság helyességét, a versenyzőknek nem is sikerült.[2]

[2] A kérdést feladatnak kitűzni tervezzük. *(Szerk.)*