I. megoldás. A bal oldal harmadik és negyedik tagja így alakítható át:

$$c(a-b)^2+4abc=c(a+b)^2.$$

Vonjuk le ezután a bal oldal egyes tagjaiból a jobb oldal megfelelő tagját, így a különbség szorzattá alakítható:

$$\begin{aligned}
&a\big((b-c)^2-a^2\big)+b\big((c-a)^2-b^2\big)+c\big((a+b)^2-c^2\big)=\\
&=a(b-c-a)(b-c+a)+b(c-a-b)(c-a+b)+c(a+b-c)(a+b+c)=\\
&=(a+b-c)(ab-ac-a^2-bc+ab-b^2+ac+bc+c^2)=\\
&=(a+b-c)\big(-(a-b)^2+c^2\big)=(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c).
\end{aligned}$$

Itt mind a három tényező pozitív, mivel egy háromszög két oldalának az összege nagyobb a harmadiknál. Ezzel a feladat állítását igazoltuk.

Megjegyzések. 1. A feladat állítása így is fogalmazható: az egyenlőtlenség teljesülése szükséges feltétele annak, hogy a, b, c hosszúságú szakaszokból háromszöget lehessen szerkeszteni.

Könnyen látható, hogy pozitív a, b, c számokra szorítkozva a feltétel elégséges is. Valóban, ha az egyenlőtlenség teljesül, akkor az átalakítással nyert szorzat pozitív, tehát vagy mind a három tényező pozitív, vagy kettő negatív, egy pozitív. Az első esetben létezik a, b, c oldalú háromszög. Ha viszont pl. az első két tényező negatív volna, akkor az összegük, $2a$ is, holott a pozitív. Ez tehát nem lehetséges.

2. Ha a háromszög egy szakaszt lefedő két szakasszá fajul el, akkor a két oldal egyenlővé válik.

II. megoldás. A két oldal különbsége tagokra bontás után így alakítható át:

$$a(b^2+c^2-a^2)+b(c^2+a^2-b^2)+c(a^2+b^2-c^2)-2abc. \tag{1}$$

Ez, a háromszög a, b, c-vel szemközti szögeit, mint szokás, α, β, γ-val jelölve, a cosinustétel alapján így alakítható tovább:

$$2abc(\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma-1).$$

Itt, felhasználva, hogy $\alpha+\beta+\gamma=180^\circ$, továbbá a könnyen igazolható

$$\begin{aligned}
\cos\varphi+\cos\psi&=2\cos\frac{\varphi+\psi}{2}\cos\frac{\varphi-\psi}{2},\\
\cos\varphi-\cos\psi&=2\sin\frac{\psi-\varphi}{2}\sin\frac{\psi+\varphi}{2},\\
\cos\varphi&=1-2\sin^2\frac{\varphi}{2}
\end{aligned}$$

összefüggéseket[1]

$$\begin{aligned}
\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma&=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}+1-2\sin^2\frac{\gamma}{2}=\\
&=2\cos\left(90^\circ-\frac{\gamma}{2}\right)\cos\frac{\alpha-\beta}{2}-2\sin^2\frac{\gamma}{2}+1=\\
&=2\sin\frac{\gamma}{2}\left(\cos\frac{\alpha-\beta}{2}-\sin\left(90^\circ-\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\right)+1=\\
&=1+2\sin\frac{\gamma}{2}\left(\cos\frac{\alpha-\beta}{2}-\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\right)=\\
&=1+4\sin\frac{\gamma}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\alpha}{2}.
\end{aligned}$$

Ez a kifejezés nagyobb, mint 1, mert $\alpha/2$, $\beta/2$, $\gamma/2$ hegyes szögek, s így sinusaik pozitívok. Ezzel a feladat állítását igazoltuk.

Megjegyzés. Ha (1)-ben $-2abc$ helyett $-3abc$-t írunk, a kifejezés már nem lesz pozitív. Ez volt az 1964. évi VI. Nemzetközi Matematikai Diákolimpia 2. feladata.[2] Az állítás tetszés szerinti pozitív a, b, c számokra helyes marad, sőt míndkét oldalhoz $2(a^3+b^3+c^3)$-t adva a szimmetrikusabb

$$(a^2+b^2+c^2)(a+b+c)\le 2(a^3+b^3+c^3)+3abc$$

alak általánosítható a következő módon: Ha $a_1, a_2 \ldots, a_n$ nem-negatív számok, akkor

$$\begin{aligned}
&(a_1^{n-1}+a_2^{n-1}+\ldots+a_n^{n-1})(a_1+a_2+\ldots+a_n)\le\\
&\le(n-1)(a_1^n+a_2^n+\ldots+a_n^n)+na_1a_2\ldots a_n.
\end{aligned}$$

Ez viszont az 1968. évi Schweitzer Miklós matematikai emlékverseny (egyetemi hallgatók versenye) 2. feladata volt.[3]

[1]Lásd pl.: *Hack Frigyes:* Függvénytáblázatok – Matematikai összefüggések, Tankönyvkiadó, Budapest, 1967. 75. old.
[2]Lásd a feladat megoldását K.M.L. **31** (1965), 24–25. old.
[3]Lásd Matematikai Lapok **20** (1969), 150–154. old.