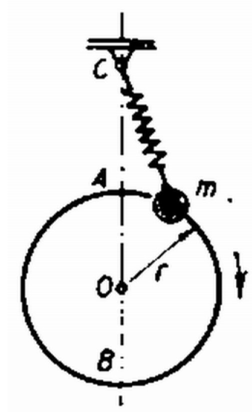
I. megoldás.



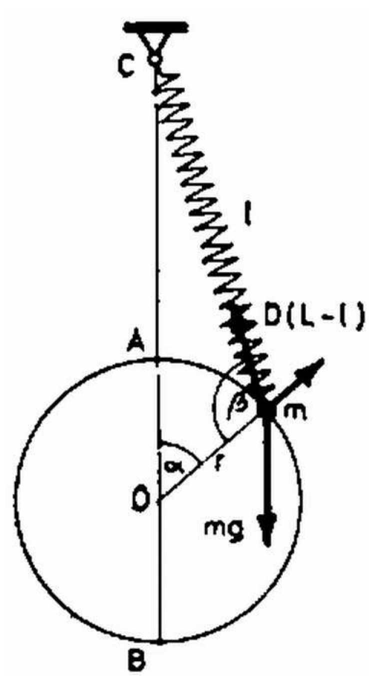
a) Ha az m tömegű test éppen a B pontig jut el, ez azt jelenti, hogy sebessége és így mozgási energiája az A és B pontokban egyaránt nulla, tehát a helyzeti energia és a rugó rugalmas energiájának összege a két pontban azonos:

(1) $$(1/2)Dx_0^2 + mg \cdot 2r = (1/2)D(x_0 + 2r)^2,$$

ahol $x_0 = (k-1)r - L$. Innen a szükséges tömeg:

(2) $$m = (D/g)(kr - L) = 4{,}8 \text{ kg}.$$

b) A legnagyobb sebességet a test az egyensúlyi helyzeten való áthaladáskor veszi föl.



A testre az mg súlyerő, a rugóerő és egy sugárirányú kényszererő hat. Így a tömeg akkor lesz nyugalomban, ha a súlyerő és a rugóerő érintő irányú összetevője egyenlő:

(3) $$D(l - L)\cos(\beta - 90°) = mg \sin\alpha.$$

Itt l a rugó pillanatnyi hossza, a cosinustételből:

(4) $$l = r\sqrt{k^2 + 1 - 2k\cos\alpha} = ry$$

(bevezetve az y új változót, amit majd a II. megoldásban használunk fel). A rugó irányát jellemző β szög a sinustételből határozható meg

(5) $$\frac{\sin\beta}{\sin\alpha} = \frac{kr}{l}.$$

A (3)–(5) egyenletek felhasználásával a kifejezhető:

$$\alpha = \text{arc}\cos\left[\frac{k^2+1}{2k} - \frac{kL^2D^2}{2(kDr-mg)^2}\right]. \tag{6}$$

m értékét (2)-ből behelyettesítve

$$\alpha = \text{arc}\cos\left[1/(2k)\right] \approx 75{,}5^\circ.$$

Balogh László (Budapest, Apáczai Csere J. Gyak. Gimn., II. o. t.)

II. megoldás. A feladat b) része annak alapján is megoldható, hogy abban a pontban, ahol a test sebessége és mozgási energiája maximális, a helyzeti- és rugóenergia összege minimális. Egy tetszőleges helyzetben

$$E_h + E_r = (1/2)D(l-L)^2 + mgr\cos\alpha = \frac{1}{2}D(ry-L)^2 + mgr\frac{k^2+1-y^2}{2k}, \tag{7}$$

ahol l-et és $\cos\alpha$-t (4)-bőI y-nal fejeztük ki. Az energia szélsőértékeit deriváltjának nulla-helyei adják. Közvetett függvényként deriválva

$$\frac{d}{d\alpha}(E_h+E_r) = \frac{d}{dy}(E_h+E_r)\frac{dy}{d\alpha} = \left(Dr^2y - DrL - \frac{mgr}{k}y\right)\frac{k\sin\alpha}{\sqrt{k^2+1-2k\cos\alpha}}. \tag{8}$$

A $\sin\alpha = 0$ esetnek megfelelő $\alpha_1 = 0^\circ$ és $\alpha_2 = 180^\circ$ megoldások az A és B pontokat adják, ezekben a sebesség minimális. Ha a másik tényező nulla, az

$$y = \frac{DLk}{Drk - mg} \tag{9}$$

eredményre jutunk. (2)-t beírva $y = k$, α-ra az előző megoldás eredménye adódik.

Fodor Zoltán (Budapest, Radnóti M. Gyak. Gimn., III. o. t.)

Megjegyzés. Diszkutáljuk eredményünket m függvényében a többi paramétert változatlatul hagyva!

Ha m nagyon nagy, a test nyilván körben mozog a pálya mentén, sebessége pedig B-ben a legnagyobb. Ez addig van így, amíg (9)-ből y-ra és onnan α-ra értelmes eredmény nem adódik, vagyis $\alpha = 180^\circ$, (4)-ből $y = 3$ nem lesz. (9)-ből ekkor $m = 5{,}87$ kg adódik. Ha 4,8 kg $<$ m $<$ 5,87 kg, a tömeg körben mozog, de sebessége már egy közbülső α helyzetben a legnagyobb. A tömeget tovább csökkentve az m tömegű test ide-oda mozog egészen addig, amíg a maximális sebességű helyet jellemző α szög 0°-ká nem válik. Ekkor $y = 1$, $m = 1{,}6$ kg. Ha $m < 1{,}6$ kg, az A pont stabil egyensúlyi helyzet, mozgás nem jön létre.