I. megoldás. Vizsgáljuk először azt az esetet, amikor a külső légnyomást nem vesszük figyelembe. Jelöljük a bal oldali tartály adatait 1-es, a jobb oldali adatait 2-es indexszel! Kezdetben $V_{10} = V_{20} = 11{,}2$ l, $T_0 = 273$ K mindkét tartályban, $m_1 = 12$ g, $m_2 = 2$ g, $M = 4$. Ezekből kiszámíthatók a nyomások: $p_{10} = 60\ \mathrm{N/cm^2}$, $p_{20} = 10\ \mathrm{N/cm^2}$. Az elválasztó fal jó hővezető, s ez azt biztosítja, hogy a két oldal hőmérséklete minden állapotban azonos T érték. A hőmérséklet azonban függ attól, hogy mennyire van összenyomva a gáz, s ezért T a V_2 függvénye. Célunk a $T(V_2)$ függvény meghatározása. Ennek ismeretében ugyanis az általunk végzett munka könnyen meghatározható: a teljes rendszer hőt nem vehetett fel, ezért belső energiájának megváltozása a kezdeti és végállapot között éppen a külső munkavégzés.

Ideális gázról van szó, ezért a belső energia $U = c_v mT$, tehát

$$W = c_v(m_1 + m_2)\big[T(0) - T(V_{20})\big]. \tag{1}$$

$T(V_2)$ meghatározásához bontsuk a folyamatot két részre: az első rész tartson a szelep kinyílásáig. A bal oldali rendszer térfogata ekkor állandó. Írjuk föl mindkét oldalra a termodinamika első főtételét kicsiny ΔV_2 mellett! A dugattyú ΔV_2-vel történő összenyomásakor:

$$\Delta Q_2 = \Delta U_2 - p_2\Delta V_2,$$
$$\Delta Q_1 = \Delta U_1.$$

A teljes rendszer zárt, ezért $\Delta Q_2 = -\Delta Q_1$. Ebből

$$c_v(m_1 + m_2)\Delta T = +p_2\Delta V_2. \tag{2}$$

Ugyanerre az egyenletre jutunk akkor is, ha rögtön a teljes rendszerre írjuk föl az I. főtételt, hiszem az adiabatikus elzárás miatt a teljes fölvett hő 0. Az általános gáztörvény kapcsolatot jelent az egyes állapotjelzők között:

$$p_2V_2 = (m_2/M)RT, \tag{3}$$
$$p_1V_{10} = (m_2/M)RT. \tag{4}$$

A (2), (4) egyenletek már egyértelműen leírják a rendszer viselkedését (a szelep kinyílásáig). (3)-ból kifejezzük p_2-t és behelyettesítjük (2)-be, így a következő összefüggést kapjuk:

$$\frac{\Delta T}{\Delta V_2} = -\frac{m_2}{m_1 + m_2}\cdot\frac{R}{M}\cdot\frac{1}{c_v}\cdot\frac{T}{V_2}. \tag{5}$$

A $T(V_2)$ függvény alakját a fenti egyenlet határozza meg. A jobb és bal oldal határértékét véve $\Delta V_2 \to 0$ esetén kapjuk:

$$T'(V_2) = -\frac{m_2}{m_1 + m_2}\cdot\frac{R}{M}\cdot\frac{1}{c_v}\cdot\frac{T(V_2)}{V_2}. \tag{5'}$$

Tegyük föl, hogy $T(V_2)$ hasonló típusú függvény, mint adiabatikus állapotváltozás esetén, tehát

$$T(V_2)\cdot V_2^{\kappa'-1} = C = \text{konst.}$$

A $T(V_2) = C\cdot V_2^{1-\kappa'}$ alakot (5′)-be helyettesítve kapjuk, hogy

$$\kappa' - 1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2}\,\frac{R}{M}\cdot\frac{1}{c_v} = \frac{c_p - c_v}{c_v}\cdot\frac{m_2}{m_1 + m_2} = (\kappa - 1)\frac{m_2}{m_1 + m_2}. \tag{6}$$

Fölhasználtuk a $c_p - c_v = R/M$ Robert–Mayer egyenletet is. C értéke a kezdeti adatokból határozható meg. A $T(V_2)$ függvény tehát:

$$T(V_2) = \frac{V_{20}}{V_2}^{\kappa'-1}\cdot T_0,$$

κ'-t (6) adja meg.

Mindez azonban csak addig a V_{2k} kritikus értékig érvényes, amíg p_2 utol nem éri p_1 et. A $p_2 = p_1$ feltételből:

$$V_2k = (m_2/m_1)\cdot V_{10}.$$

Az ehhez tartozó hőmérséklet:

$$T(V_{2k}) = \left(\frac{m_1}{m_2}\,\frac{V_{20}}{V_{10}}\right)^{\kappa'-1} T_0 \approx 324\ \text{K}. \tag{7}$$

A $V_2 = V_{2k}$ értéknél a szelep kinyílik, s az egész rendszer egyetlen $V_{10}+V_{2k}$ térfogatú rendszerré válik. A hőmérsékletben nincs változás, hiszen az a két oldalon eddig is egyenlő volt.

Az egész, rendszerre jellemző (2) egyenlet továbbra is érvényben marad. Az általános gáztörvény azonban így módosul:

(8) $$pV = \frac{m_1 + m_2}{M} RT.$$

$V = V_{10} + V_2$ a teljes térfogat, tehát megváltozása $\Delta V = \Delta V_2$, $p = p_2$ a közös nyomás.

Gyakorlásként érdemes levezetni, hogy (2)-ből és (8)-ból milyen megoldás adódik. A jól ismert

$$T(V)V^{\kappa-1} = C' = \text{konst.}$$

összefüggést kapjuk vissza. C' a második szakasz kiindulási értékeiből határozható meg:

$$T(V_2) = \left(\frac{V_{10} + V_{2k}}{V_{10} + V_2}\right)^{\kappa'-1} T(V_{2k}), \quad \text{ha} \quad V_2 < V_{2k}.$$

Teljes összenyomáskor $V_2 = 0$, tehát a végállapot hőmérséklete

$$T(0) = \left(\frac{V_{10} + V_{2k}}{V_{10}}\right)^{\kappa-1} T(V_{2k}) \approx 360\ \text{K}.$$

(1)-be behelyettesítve:

$$W = c_v(m_1 + m_2)\left[\left(\frac{m_1 + m_2}{m_1}\right)^{\kappa-1}\left(\frac{m_1}{m_2}\cdot\frac{V_{20}}{V_{10}}\right)^{(\kappa-1)m_2/(m_1+m_2)} - 1\right] T_0.$$

Numerikus adatokkal $W \approx 900$ cal. Ha azonban van p_0 külső légnyomás is ($p_0 = 10\ \text{N/cm}^2$), ennek $p_0 \cdot V_{20}$ munkáját még ki kell vonnunk W-ből, hogy az általunk végzett összes munkát megkapjuk. Így $W_\sigma = 630$ cal.

Honos Attila (Mosonmagyaróvár, Kossuth L. Gimn., IV. o. t.) dolgozata alapján

Megjegyzés. Sokan úgy akarták megoldani a feladatot, hogy föltették, hogy az elválasztó fal mindaddig hőszigetelő, amíg a két nyomás egyenlő nem lesz. Ekkor jó hővezetőre cserélték ki a falat, ami a hőmérséklet kiegyenlitődését eredményezte. (Ez mindenképpen bekövetkezik, hiszen kinyílik a szelep.) Ezután még egy adiabatikus összenyomás volt hátra. (A fenti folyamat pontosan az, ami a Diákolimpia feladatában szerepel.) Az általunk vizsgált folyamatban azonban nem lehet ugyanennyi a munkavégzés, hiszen a munka – ami nem állapotjelző – jelentősen függ attól az „úttól”, amin egyik állapotból a másikba jutunk. (Természetesen a végállapotok sem azonosak.)

II. megoldás. Megtehetjük azonban azt, hogy a folyamat első szakaszát közelítjük a következőképpen: a kis ΔV_2 térfogatváltozás alatt adiabatikusnak tekintjük a változást, majd állandó térfogaton megengedjük a két tartályrész között a hőcserét. A közös hőmérséklet beállása után ismét adiabatikus összenyomás következhet (az egyszerűség kedvéért ugyanazzal a ΔV_2-vel). Mindezt addig folytajuk, amíg a két nyomás meg nem egyezik. A közelítés természetesen annál pontosabb, minél kisebb ΔV_2. Az egyenletek:

(9) $$T_0 V_{20}^{\kappa-1} = T_1' \cdot V_{21}^{\kappa-1},$$

(10) $$V_{21} = V_{20} - \Delta V_2.$$

Ezután következik a hőcsere. A közös hőmérséklet

(11) $$T_1 = \frac{m_1 T_0 + m_2 T_1'}{m_1 + m_2}$$

A nyomásokat a (3) és (4) egyenlet adja. Ezután megismételjük az eljárást:

$$T_1 V_{21}^{\kappa-1} = T_2' V_{22}^{\kappa-1} \quad \text{stb.}$$

A fenti lépéseket numerikusan kell kiértékelni. Pl. a $\Delta V_2 = 0{,}01$ l választással már 3 jegyre pontosan adódik $T(V_2k)$ értéke, de a $\Delta V_2 = 0{,}7$ l-es beosztással is csak néhány fok az eltérés. Az utóbbi számolás már számítógép nélkül is viszonylag rövid idő alatt elvégezhető. $T(V_{2k})$ meghatározása után a megoldás menete azonos az elsővel. [Az (5) egyenlet maga is megoldható lett volna hasonló numerikus módszerrel.]

Divós Ferenc (Sopron, Berzsenyi D. Gimn., IV. o. t.)
Kálvin Sándor (Debrecen, KLTE Gyak. Gimn., III. o. t.) dolgozata alapján

Megjegyzés. Kimutatjuk, hogy eléggé kicsi ΔV_2 esetén a két megoldás ekvivalens. (9)-ből és (10)-ből

$$T_1' = T_0\left(\frac{V_{20}}{V_{20} - \Delta V_2}\right)^{\kappa-1} = T_0\left(1 - \frac{\Delta V_2}{V_{20}}\right)^{1-\kappa}.$$

Felhasználva, hogy $x \ll 1$ esetén jó közelítéssel:

$$(1-x)^{\alpha} = 1 - \alpha x,$$

azt kapjuk, hogy

$$T_1' = T_0 \left[1 + (\kappa - 1) \frac{\Delta V_2}{V_{20}} \right], \quad \text{ha} \quad \Delta V_2 \ll V_{20}.$$

Ezt (10)-be behelyettesítve

$$T_1 - T_0 = \Delta T = -\frac{m_2}{m_1 + m_2} (\kappa - 1) T_0 \cdot \frac{V_2}{V_{20}},$$

ami éppen (5) megfelelője az első lépésre.

Frey István (Pécs, Zipernovszky K. Szakközépisk., III. o. t.)

III. megoldás. Vizsgáljuk meg, mennyi hőt kellene közölni a teljes rendszerrel állandó térfogaton ahhoz, hogy hőmérséklete Δt-vel emelkedjék (az első szakaszban):

$$\Delta Q_v = c_v m_1 \Delta t + c_v m_2 \Delta t.$$

Állandó nyomáson pedig

$$\Delta Q_p = c_v m_1 \Delta t + c_p m_2 \Delta t.$$

A teljes rendszer tehát úgy viselkedik, mintha

$$c_v' = \frac{c_v m_1 + c_v m_2}{m_1 + m_2} = c_v, \quad c_p' = \frac{c_v m_1 + c_p m_2}{m_1 + m_2}$$

fajhőjű gáz lenne. Ha alkalmazzuk rá az ideális gáz adiabatikus állapotváltozásának egyenletét, akkor a

$$T \cdot V^{\frac{c_p'}{c_v'} - 1} = C$$

egyenletet kapjuk, ahol

$$\kappa' - 1 = \frac{c_p'}{c_v'} - 1 = \frac{c_p - c_v}{c_v} \frac{m_2}{m_1 + m_2} = (\kappa - 1) \frac{m_2}{m_1 + m_2}.$$

Ez éppen a (6) összefüggés.