Tetszőleges k pozitív egész az $1, 2, \dots, n$ számok közül pontosan $\left[\frac{n}{k}\right]$ darabnak osztója, ezért $S_1 = \left[\frac{n}{1}\right] + \left[\frac{n}{3}\right] + \left[\frac{n}{5}\right] + \dots$ és $S_2 = \left[\frac{n}{2}\right] + \left[\frac{n}{4}\right] + \left[\frac{n}{6}\right] + \dots$ (Az összegek egy idő után csupa 0-ból állnak.)

Ismeretes, hogy $\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots + \dots = \ln 2$, vagyis

$$\frac{n}{1} - \frac{n}{2} + \frac{n}{3} - \dots + \dots = n \cdot \ln 2. \tag{1}$$

Mivel tetszőleges k pozitív egészre

$$0 < \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = \frac{1}{k^2+k} < \frac{4}{4k^2+4k-3} = \frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+3}$$

azért tetszőleges m pozitív egészre

$$\begin{aligned} 0 &< \frac{1}{m} - \frac{1}{m+1} + \frac{1}{m+2} - \frac{1}{m+3} + \dots - \dots = \\ &= \left(\frac{1}{m} - \frac{1}{m+1}\right) + \left(\frac{1}{m+2} - \frac{1}{m+3}\right) + \dots < \\ &< \left(\frac{1}{2m-1} - \frac{1}{2m+3}\right) + \left(\frac{1}{2m+3} - \frac{1}{2m+7}\right) + \dots = \frac{1}{2m-1}. \end{aligned} \tag{2}$$

Legyen m tetszőleges pozitív egész. (1) és (2) felhasználásával

$$\begin{aligned} S_1 - S_2 &= \left[\frac{n}{1}\right] - \left[\frac{n}{2}\right] + \left[\frac{n}{3}\right] - \left[\frac{n}{4}\right] + \dots - \dots = \\ &= \left(\left[\frac{n}{1}\right] - \left[\frac{n}{2}\right] + \dots - \dots - \left[\frac{n}{2m}\right]\right) + \sum_{k=m}^{\infty}\left(\left[\frac{n}{2k+1}\right] - \left[\frac{n}{2k+2}\right]\right) > \\ &> \left(\frac{n}{1} - 1\right) - \frac{n}{2} + \left(\frac{n}{3} - 1\right) - \frac{n}{4} + \dots + \left(\frac{n}{2m-1} - 1\right) - \frac{n}{2m} = \\ &= \left(\frac{n}{1} - \frac{n}{2} + \dots - \dots + \frac{n}{2m-1} - \frac{n}{2m}\right) - m = \\ &= n \cdot \ln 2 - \left(\frac{n}{2m+1} - \frac{n}{2m+2} + \frac{n}{2m+3} - \dots + \dots\right) - m > n \cdot \ln 2 - \frac{n}{4m+1} - m. \end{aligned} \tag{3}$$

Hasonlóképpen

$$\begin{aligned} S_1 - S_2 &= \left(\left[\frac{n}{1}\right] - \left[\frac{n}{2}\right] + \dots - \dots + \left[\frac{n}{2m+1}\right]\right) - \sum_{k=m+1}^{\infty}\left(\left[\frac{n}{2k}\right] - \left[\frac{n}{2k+1}\right]\right) < \\ &< \frac{n}{1} - \left(\frac{n}{2} - 1\right) + \frac{n}{3} - \left(\frac{n}{4} - 1\right) + \dots - \dots - \left(\frac{n}{2m} - 1\right) + \frac{n}{2m+1} = \\ &= \left(\frac{n}{1} - \frac{n}{2} + \dots - \dots - \frac{n}{2m} + \frac{n}{2m+1}\right) + m = \\ &= n \cdot \ln 2 + \left(\frac{n}{2m+2} - \frac{n}{2m+3} + \frac{n}{2m+4} - \dots + \dots\right) + m < n \cdot \ln 2 + \frac{n}{4m+3} + m. \end{aligned} \tag{4}$$

A (3) és (4) egyenlőtlenségek összevetéséből

$$|S_1 - S_2 - n \cdot \ln 2| < \frac{n}{4m+1} + m, \tag{5}$$

és ez tetszőleges m pozitív egészre igaz. Az $m = \left[\frac{\sqrt{n}}{2}\right] + 1$ választással azt kapjuk, hogy

$$|S_1 - S_2 - n \cdot \ln 2| < \frac{n}{2\sqrt{n}+1} + \frac{\sqrt{n}}{2} + 1 < \sqrt{n} + 1.$$