I. megoldás. Könnyen ellenőrizhető, hogy

$$1+\frac{a_i^2}{a_{i+1}} \geq \frac{(1+a_i)^2}{1+a_{i+1}}. \tag{2}$$

(Beszorzás és rendezés után az $(a_i - a_i + 1)^2 \geq 0$ egyenlőtlenséget kapjuk.) A (2) egyenlőtlenséget $i = 1, 2, \ldots, n$-re felírva és összeszorozva éppen a bizonyítandó állítást kapjuk.

Csóka Endre (Debrecen, Fazekas M. Gimn., 9. o.)

II. megoldás. Az állítást n-re vonatkozó teljes indukcióval bizonyítjuk. Ha $n=1$, akkor (1) mindkét oldalán $1+a_1$ áll.

Legyen most $n>1$, és tegyük fel, hogy az állítás igaz $n-1$ tényező esetén. Bebizonyítjuk, hogy ekkor n darab tényező esetén is igaz.

Az $a_1, \ldots, a_n$ számok ciklikus cseréjével a bizonyítandó állítás nem változik, ezért feltehetjük, hogy a_n az (egyik) legnagyobb. Írjuk fel az indukciós feltevést az $a_1, \ldots, a_{n-1}$ számokra:

$$\left(1+\frac{a_1^2}{a_2}\right)\cdot\left(1+\frac{a_2^2}{a_3}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{a_{n-1}^2}{a_1}\right) \geq (1+a_1)(1+a_2)\ldots(1+a_{n-1}). \tag{3}$$

Ahhoz, hogy ebből (1) következzen, elégséges, ha megmutatjuk, hogy

$$\frac{\left(1+\frac{a_{n-1}^2}{a_n}\right)\left(1+\frac{a_n^2}{a_1}\right)}{1+\frac{a_{n-1}^2}{a_1}} \geq 1+a_n.$$

Beszorozva és rendezve:

$$(a_n+a_{n-1}^2)(a_1+a_n^2) \geq a_n(1+a_n)(a_1+a_{n-1}^2)$$
$$(a_n-a_1)(a_n-a_{n-1})(a_1+a_n) \geq 0.$$

Mivel $a_n \geq a_1$ és $a_n \geq a_{n-1}$, a bal oldalon mindhárom tényező nemnegatív. Ezzel a bizonyítást befejeztük.

III. megoldás. Tetszőleges $H \subset \{1, 2, \ldots, n\}$ nem üres halmaz esetén legyen $P_H = \prod_{i\in H} a_i$, illetve legyen $P_\emptyset = 1$. (1) jobb oldala beszorozva nem más, mint

$$(1+a_1)(1+a_2)\ldots(1+a_n) = \sum_{H\subset\{1,\ldots,n\}} P_H. \tag{4}$$

Jelölje H' azt a halmazt, amelyet úgy kapunk, hogy H mindegyik elemét 1-gyel növeljük $\bmod n$ (azaz $n+1$ helyett 1-et írunk). (1) bal oldala beszorozva

$$\left(1+\frac{a_1^2}{a_2}\right)\cdot\left(1+\frac{a_2^2}{a_3}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{a_n^2}{a_1}\right) = \sum_{H\subset\{1,\ldots,n\}} \frac{P_H^2}{P_{H'}}. \tag{5}$$

Azt kell tehát igazolnunk, hogy

$$\sum_{H\subset\{1,\ldots,n\}} \frac{P_H^2}{P_{H'}} \geq \sum_{H\subset\{1,\ldots,n\}} P_H. \tag{6}$$

Megmutatjuk, hogy (6) következik az úgynevezett rendezési tételből (megtalálható pl. *Matematikai Versenytételek*, II. rész, 60–61. oldal; Tankönyvkiadó, Budapest, 1988):

Legyenek $x_1, x_2, \ldots, x_n$ és $y_1, y_2, \ldots, y_n$ pozitív valós számok, és jelentse $z_1, z_2, \ldots, z_n$ a második sorozat egy permutációját. Az

$$S = x_1z_1 + \cdots + x_nz_n$$

alakú összegek közül az a legnagyobb, amelyben a $z_1, \ldots, z_n$ számok ugyanúgy vannak rendezve, mint az $x_1, \ldots, x_n$ számok, vagyis $x_i < x_j$ esetén $z_i \leq z_j$. A legkisebb összeg pedig az, amelyben a $z_1, \ldots, z_n$ számok ellentétesen vannak rendezve, mint az $x_1, \ldots, x_n$ számok, vagyis $x_i < x_j$ esetén $z_i \geq z_j$.

Alkalmazzuk a rendezési tételt a P_H^2, az $\frac{1}{P_H}$, illetve az $\frac{1}{P_{H'}}$ ($H \subset \{1, \ldots, n\}$) számokra. Az $\frac{1}{P_H}$ alakú számok az $\frac{1}{P_{H'}}$ alakú számok egy permutációját adják, és rendezésük éppen ellentétes a P_H^2 alakú számokéval. Ezért

$$\sum_{H\subset\{1,\ldots,n\}} \frac{P_H^2}{P_{H'}} = \sum_{H\subset\{1,\ldots,n\}} P_H^2\cdot\frac{1}{P_{H'}} \geq \sum_{H\subset\{1,\ldots,n\}} P_H^2\cdot\frac{1}{P_H} = \sum_{H\subset\{1,\ldots,n\}} P_H.$$

Baharev Ali (Vác, Boronkai Gy. Gimn., 12. o.t.) és *Gyenes Zoltán* (Budapest, ELTE Apáczai Csere J. Gyak. Gimn., 12. o.t.) dolgozata alapján