Tekintsük azokat a pontokat, amelyek az E egységnégyzettől legfeljebb $\frac{\sqrt{2}}{2}$ távolságra vannak. Ezek a pontok egy olyan 4 téglalapból, 4 negyedkörből és 1 négyzetből álló K alakzatot alkotnak, amelynek a területe $4\cdot 1\cdot \frac{\sqrt{2}}{2}+4\cdot\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2\cdot\pi+1$ $1+2\sqrt{2}+\frac{\pi}{2}$ (*1. ábra*). Ha egy egységnégyzet középpontja K-n kívül helyezkedik el, akkor a négyzetnek és E-nek biztosan nincs közös pontja.

Ha a feladatban szereplő 1999 egységnégyzethez tartozó K-nak megfelelő alakzatok nem fedik le azt a 104 egység oldalú négyzetet, amelyet úgy kapunk, hogy a nagy négyzet minden oldaláról levágunk egy 0,5 egység széles csíkot, akkor a lefedetlen területre helyezve egy, a nagy négyzet oldalaival párhuzamosan álló egységnégyzetet, annak nem lesz a többi egységnégyzettel közös pontja. Tudjuk, hogy $\pi<3,15$ és $\sqrt{2}<1,415$, ezért az 1999 darab K-val egybevágó idom összterülete kisebb, mint

$$1999\cdot\left(1+2\cdot 1,415+\frac{3,15}{2}\right)=10\ 804,595.$$

A 104 egység oldalú négyzet területe ennél nagyobb, mert $104^2=10\ 816$. Tehát mindenképpen marad lefedetlen terület, s így elhelyezhető a feltételeknek megfelelő 2000-edik egységnégyzet.

Kerékfy Péter (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., 10. o.t.) dolgozata alapján

Megjegyzés. Azt is be lehet látni, hogy ha eredetileg 2336 egységnégyzetet helyeztünk el, akkor is lerakható legalább még egy, a feltételeknek megfelelő módon. Legyen ugyanis K' azoknak a pontoknak a halmaza, amelyek E-től legfeljebb $0,5$ egység távolságra vannak (*2. ábra*). Ha a nagy négyzet minden oldaláról egy $\frac{\sqrt{2}}{2}$ egység széles csík levágásával kapott $(105-\sqrt{2})^2$ területű négyzetnek van olyan pontja, amit a lerakott egységnégyzethez tartozó K'-nek megfelelő alakzatok egyike sem, a K-nak megfelelő alakzatok közül pedig legfeljebb egy, az N egységnégyzethez tartozó alakzat tartalmaz, akkor ebbe a pontba elhelyezhető egy N oldalaival párhuzamos oldalú, a feltételeknek megfelelő egységnégyzet. A $K\setminus K'$ ponthalmaz területe

$$\left(1+2\sqrt{2}+\frac{\pi}{2}\right)-\left(1+4\cdot 1\cdot\frac{1}{2}+4\cdot\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\pi\right)=2\sqrt{2}-2+\frac{\pi}{4}.$$

Ha tehát a $K\setminus K'$ típusú ponthalmazokat legalább kétszeresen akarjuk lefedni, akkor a $(105-\sqrt{2})$ oldalú négyzet lefedéséhez szükséges egységnégyzetek n számára teljesülnie kell az

$$n\cdot\left(1+2+\frac{\pi}{4}\right)+\frac{n}{2}\cdot\left(2\sqrt{2}+\frac{\pi}{4}-2\right)>(105-\sqrt{2})^2$$

egyenlőtlenségnek. Ebből $n>2336$ adódik, s éppen ezt akartuk megmutatni.

Jankó András (Szeged, Ságvári E. Gyak. Gimn., 9. o.t.) dolgozata alapján