I. megoldás. Számítsuk ki $\cos 18^\circ$ értékét: tekintsük az ABC egyenlő szárú háromszöget, amelyben a szárak hossza 1, közbezárt szögük 36°.

A B-ből húzott szögfelező AC-t D-ben metszi. Ekkor az ABC és DAB háromszögek hasonlóak, így $CB : DB = AB : DA$, azaz $\frac{1}{a} = \frac{a}{1-a}$.

Innen $a = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$. A C-ből induló magasság felezi a 36°-os szöget és az AB szakaszt is, így $\sin 18^\circ = \frac{a}{2} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$, $\cos 18^\circ = \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$.

Legyen $\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4} = x$, ahol $x > 0$. Ekkor $16x^2 = 10 + 2\sqrt{5}$, vagyis $\sqrt{5} = 8x^2 - 5$. Ebből négyzetre emeléssel kapható: $64x^4 - 80x^2 + 20 = 0$. Osszunk 4-gyel, így a feladat kérésének megfelel a $16x^4 - 20x^2 + 5$ polinom.

II. megoldás. Legyen $\cos 18^\circ = x$ $(0 < x < 1)$, ekkor $\sin 18^\circ = \sqrt{1-x^2}$.

Ezek segítségével:

$$\sin 36^\circ = 2x\sqrt{1-x^2}, \qquad \cos 36^\circ = x^2 - (1-x^2) = 2x^2 - 1.$$

$\sin 72^\circ = 4x\sqrt{1-x^2}(2x^2-1)$. Mivel $\cos 18^\circ = \sin 72^\circ$, azért $4x\sqrt{1-x^2}(2x^2-1) = x$. Az x-szel oszthatunk, hiszen nem 0. Vagyis a feladat kérésének megfelel a $16(1-x^2)(2x^2-1)^2 - 1 = -64x^6 + 128x^4 - 80x^2 + 15$ polinom.

Dénes Attila (Békéscsaba, Rózsa F. Gimn., 12. o.t.)

Megjegyzések. 1. A II. megoldásban kapott $-64x^6 + 128x^4 - 80x^2 + 15$ polinom szorzat alakban így írható: $(3 - 4x^2)(16x^4 - 20x^2 + 5)$. A második tényező azonos az I. megoldásban megadott polinommal.

2. *Nyul Balázs* (Debrecen, Fazekas M. Gimn., 9. o.t.) abból indult ki, hogy $5 \cdot 18^\circ = 90^\circ$, így a $\cos 5\alpha = 0$ egyenletet kellene felírni $\cos\alpha$ hatványai segítségével, ahol most $\alpha = 18^\circ$.

$\cos 5\alpha$ a szögfüggvények addíciós tételeiből némi számolással kifejezhető:

$$\cos 5\alpha = 64\cos^5\alpha - 80\cos^3\alpha + 20\cos\alpha,$$

így $\cos 18^\circ$ gyöke a $64x^5 - 80x^3 + 20x$ polinomnak. Ez mellesleg az I. megoldásban kapott polinom $4x$-szerese.

Tetszőleges n egész számhoz létezik T_n egész együtthatós polinom, amelyre $T_n(\cos\alpha) = \cos n\alpha$. A T_n polinomot az n-edik *Csebisev-polinomnak* hívják.